МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Ростовский государственный строительный университет

Утверждено на заседании кафедры высшей математики 11.06.2011, протокол №10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Курс лекций
и
образец решения индивидуального задания

Ростов-на-Дону
2011

УДК 517(07)
Дифференциальные уравнения (Курс лекций и образец решения индивидуального задания №1 по высшей математике для студентов очной формы обучения) — Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2011, 52 с.

Изложен курс лекций по дифференциальным уравнениям. Приведен образец индивидуального задания, снабженный подробным решением входящих в него задач.

Методические указания предназначены для студентов очной формы, проходящих обучение на кафедре высшей математики РГСУ, а также на математических кафедрах других вузов.

Составители: зав. кафедрой высшей математики,
д.ф.-м.н., профессор Павлов И.В.,
к.ф.-м.н., доцент Цвиль М.М.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент А.М. Можаев,
к.ф.-м.н., доцент Г.А. Власков

Общее редактирование и компьютерный набор И.В. Павлова

ЧАСТЬ 1: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Основные определения, связанные с дифференциальными уравнениями 1-го порядка

Определение 1. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** (кратко д.у.) 1-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y')=0, \tag{1}$$

в котором x – независимая переменная, $y=y(x)$ – искомая функция, $y'=y'(x)$ – ее производная, а F – заданная функция трех переменных, определенная в некоторой области пространства R^3.

Определение 2. Если из уравнения (1) можно выразить y', то это уравнение записывается в виде

$$y'=f(x,y), \tag{1$'$}$$

или, что то же самое, следующим образом:

$$dy=f(x,y)dx \tag{1$''$}$$

(предполагается, что функция $f(x,y)$ определена в некоторой области пространства R^2). Д.у. (1′) и (1″) называются дифференциальными уравнениями 1-го порядка, разрешенными относительно производной.

Определение 3. ***Решением*** д.у. (1), а также д.у. (1′) и (1″), называется функция $y=y(x)$, определенная и дифференцируемая на некотором интервале (a,b), которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает эти уравнения в тождества (то есть на (a,b), соответственно, выполняются тождества $F(x,y(x),y'(x))\equiv 0$, $y'(x)\equiv f(x,y(x))$ или $dy(x)\equiv f(x,y(x))dx$). ***Общим решением*** д.у. (1), (1′) и (1″) называется функция

$$y=\varphi(x,C), \tag{2}$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любом конкретном значении параметра C (этот параметр называется произвольной постоянной);

б) для любой точки (x_0,y_0) из области определения функции $f(x,y)$ найдется такое значение $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет соотношению:

$$y_0=\varphi(x_0,C_0).$$

Нахождение такого $C=C_0$ по условию $y_0=\varphi(x_0,C_0)$ называется ***решением задачи Коши*** с начальными данными (x_0,y_0). Найденную таким образом функцию $y=\varphi(x,C_0)$ называют ***частным решением*** д.у., удовлетворяющим начальным данным (x_0,y_0).

Если, решая д.у. 1-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi(x,y,C)=0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi(x,y,C)=0$ называют ***общим интегралом*** дифференциального уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения, уравнения Бернулли

1) ***Д.у. с разделяющимися переменными*** называется уравнение вида:

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y), \qquad (3)$$

которое с помощью дифференциалов часто записывают так:

$$M_1(x)\cdot M_2(y)dx+N_1(x)\cdot N_2(y)dy=0 \qquad (3')$$

(для простоты мы всегда будем предполагать, что функции $N_1(x)$ и $M_2(y)$ рассматриваются на тех интервалах, на которых они не обращаются в нуль, а применяемые равносильные преобразования относятся именно к этим интервалам).

Разделим переменные:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\,.$$

Последнее уравнение решается взятием интегралов от левой и правой части:

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\,.$$

Произвольная постоянная *C* появляется после вычисления этих интегралов.

<u>*Пример 1*</u>. Решим д.у.

$$4ydx-x(y-3)dy=0\,.$$

Разделим переменные, поделив обе части уравнения на xy. Получим:

$$\frac{4}{x}dx-\frac{y-3}{y}dy=0 \Leftrightarrow \frac{4}{x}dx=\frac{y-3}{y}dy\,.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения и вычисляем интегралы:

$$\int\frac{4}{x}dx=\int\frac{y-3}{y}dy \Leftrightarrow 4\int\frac{dx}{x}=\int dy-3\int\frac{dy}{y} \Leftrightarrow 4\ln|x|+C=y-3\ln|y|\,.$$

Полученное равенство есть общий интеграл исходного уравнения. Заметим, что произвольную постоянную *C* принято записывать в той стороне д.у. с разделяющимися переменными, в которой находится независимая переменная *x*.

<u>*Пример 2*</u>. Решим д.у.

$$y' = e^{2x+3y}\,.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}\cdot e^{3y} \Leftrightarrow \frac{dy}{e^{3y}}=e^{2x}dx \Leftrightarrow \int\frac{dy}{e^{3y}}=\int e^{2x}dx \Leftrightarrow \int e^{-3y}dy=\int e^{2x}dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{e^{-3y}}{3}=\frac{e^{2x}}{2}+C \Leftrightarrow e^{-3y}=-\frac{3e^{2x}}{2}-3C \Leftrightarrow -3y=\ln\left(-\frac{3e^{2x}}{2}-3C\right) \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}\ln\left(-\frac{3e^{2x}}{2}-3C\right).$$

2) ***Однородным д.у.*** называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

Для решения этого уравнения вместо переменной y вводят переменную z по формуле $y = z \cdot x$, из которой следует, что $y' = z' \cdot x + z \cdot x' = z' \cdot x + z$. Подставляя все это в уравнение (4), получаем д.у. вида:

$$z' \cdot x + z = f(z) \Leftrightarrow z' \cdot x = f(z) - z.$$

Деля обе части полученного уравнения на x, получаем уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции z.

<u>*Пример 3*</u>. Предполагая, что $x > 0$ и $x^2 - y^2 > 0$, решим уравнение

$$x \cdot dy - \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx = 0.$$

Имеем:

$$x \cdot dy = \left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Полученное уравнение имеет вид (4). Применяя описанную выше замену, получаем:

$$z' \cdot x + z = z + \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow z' \cdot x = \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - z^2} \Rightarrow \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \frac{dx}{x}.$$

В полученном уравнении переменные разделены, поэтому можно брать интегралы от левой и правой частей:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \arcsin z = \ln|x| + C \Leftrightarrow \arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Последнее выражение есть общий интеграл исходного д.у.

Заметим, что д.у. из примера 3 аналогично решается при условиях $x < 0$ и $x^2 - y^2 > 0$ (читателю предоставляется решить это уравнение и получить общий интеграл $-\arcsin\frac{y}{x} = \ln|x| + C$). Если же допустить возможность равенства $x^2 - y^2 = 0$, то легко проверить, что функции $y = x$ и $y = -x$ также являются (***особыми***) решениями данного д.у., хотя и не содержатся ни в одном из полученных общих интегралов. До поры до времени мы будем игнорировать упомянутые детали.

3) ***Уравнением Бернулли*** называется д.у. вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n. \qquad (5)$$

Если $n = 0$, то уравнение (5) обычно называют ***линейным неоднородным уравнением 1-го порядка*** в случае, если $q(x) \neq 0$, и ***линейным однородным уравнением 1-го порядка*** в случае, если $q(x) \equiv 0$ (последний термин не имеет никакого отношения к однородному уравнению вида (4)).

Чаще всего уравнение Бернулли решают с помощью факторизации зависимой переменной. А именно, запишем зависимую переменную y в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $v > 0$ – это конкретная функция, которую мы будем выбирать так, как нам удобно, а u вводится вместо y (то есть фактически u автоматически получается как $\frac{y}{v}$). Имеем: $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$. Подставляя замены для y и y' в уравнение (5), получаем:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)\cdot u\cdot v=q(x)\cdot u^n\cdot v^n \Leftrightarrow u'\cdot v+u\left[v'+p(x)\cdot v\right]=q(x)\cdot u^n\cdot v^n.$$

Выбираем функцию v таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках $v'+p(x)\cdot v$ обратилось в нуль, то есть решаем относительно v уравнение с разделяющимися переменными:

$$v'+p(x)\cdot v=0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}=-p(x)\cdot v \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=-p(x)dx \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int p(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|v|=-\int p(x)dx \Leftrightarrow v=e^{-\int p(x)dx}.$$

При таком выборе v член, содержащий квадратные скобки, пропадает и уравнение (в предположении, что $u\neq 0$) принимает вид:

$$u'\cdot v=q(x)\cdot u^n\cdot v^n \Leftrightarrow \frac{du}{dx}=q(x)\cdot u^n\cdot v^{n-1} \Leftrightarrow u^{-n}du=q(x)v^{n-1}dx.$$

Так как $v=e^{-\int p(x)dx}$, то мы получили уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u.

Заметим, что при $n>0$ равенство $u=0$ дает функцию $y=0$, которая в этом случае также является (особым) решением уравнения (5).

<u>*Пример 4*</u>. Решим уравнение Бернулли $y'-2xy=-xy^4$. В соответствии с вышеописанной схемой разобьем решение этого уравнения на несколько этапов.

а) $y=u\cdot v,\ y'=u'v+uv' \Rightarrow u'v+uv'-2xuv=-xu^4v^4 \Leftrightarrow u'v+u\left[v'-2xv\right]=-xu^4v^4$.

б) $v'-2xv=0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dx}=2xv \Leftrightarrow \frac{dv}{v}=2xdx \Leftrightarrow \int\frac{dv}{v}=2\int xdx \Leftrightarrow \ln|v|=x^2 \Leftrightarrow v=e^{x^2}$.

Заметим, что при вычислении v мы не учитываем произвольную постоянную, так как согласно общей методике достаточно иметь одну функцию v, обращающую в нуль квадратные скобки.

в)

$$u'\cdot e^{x^2}=-xu^4e^{4x^2} \Leftrightarrow \frac{du}{dx}=-xu^4e^{3x^2} \Leftrightarrow u^{-4}du=-xe^{3x^2}dx \Leftrightarrow \int u^{-4}du=-\int xe^{3x^2}dx.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\int xe^{3x^2}dx=\left|\begin{array}{c} t=3x^2, \\ dt=6xdx \Rightarrow xdx=\frac{1}{6}dt \end{array}\right|=\frac{1}{6}\int e^t dt=\frac{e^t}{6}+C=\frac{e^{3x^2}}{6}+C.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{u^{-3}}{-3}=-\frac{e^{3x^2}}{6}-C \Rightarrow \frac{1}{u^3}=\frac{e^{3x^2}}{2}+3C \Rightarrow u^3=\frac{2}{e^{3x^2}+6C} \Rightarrow u=\sqrt[3]{\frac{2}{e^{3x^2}+6C}}.$$

г) Общее решение имеет вид: $y=e^{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{e^{3x^2}+6C}}$.

<u>*Пример 5*</u>. Решим уравнение $y'+y=(\cos x-\sin x)y^2$. Это также уравнение Бернулли.

а) $y=u\cdot v,\quad y'=u'v+uv' \quad\Rightarrow\quad u'v+uv'+uv=(\cos x-\sin x)u^2v^2 \quad\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad u'v + u\left[v' + v\right] = (\cos x - \sin x)u^2 v^2 .$$

б) $v' + v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dv}{dx} = -v \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dv}{v} = -dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|v| = -x \quad \Leftrightarrow \quad v = e^{-x}$.

в) $u'e^{-x} = (\cos x - \sin x)u^2 e^{-2x} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{du}{dx} = (\cos x - \sin x)u^2 e^{-x} \;\Leftrightarrow$

$u^{-2}du = (\cos x - \sin x)e^{-x}dx \;\Leftrightarrow\; \int u^{-2}du = \int \cos x \cdot e^{-x}dx - \int \sin x \cdot e^{-x}dx$.

К интегралу с косинусом применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \cos x \cdot e^{-x}dx = \left| \begin{matrix} U = e^{-x} \to dU = -e^{-x}dx \\ dV = \cos x dx \to V = \sin x \end{matrix} \right| = e^{-x}\sin x + \int \sin x \cdot e^{-x}dx .$$

Таким образом,

$$\frac{u^{-1}}{-1} = e^{-x}\sin x + \int \sin x \cdot e^{-x}dx - \int \sin x \cdot e^{-x}dx = e^{-x}\sin x + C \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{1}{u} = -e^{-x}\sin x - C \;\Leftrightarrow\; u = -\frac{1}{e^{-x}\sin x + C} .$$

г) $y = uv = -\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}\sin x + C} = -\dfrac{1}{\sin x + C \cdot e^{x}}$.

ЧАСТЬ 1: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 1-ГО ПОРЯДКА

Уравнения в полных дифференциалах

В этом разделе д.у. 1-го порядка мы будем записывать в виде:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 . \tag{1'''}$$

Если функция $N(x,y)$ не обращается в нуль, то, положив $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$, убеждаемся, что д.у. (1''') совпадает с д.у. (1''). Если это требуется по контексту, то мы будем считать выполненными условия $M(x,y) \neq 0$ или $N(x,y) \neq 0$.

Определение 4. Д.у. (1'''), рассматриваемое в некоторой области $D \subset R^2$, называется дифференциальным уравнением в полных дифференциалах (кратко д.у.п.д.), если в области D функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ обладают непрерывными частными производными и выполняется равенство:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} . \tag{6}$$

Теорема 1. Если д.у. (1''') является в области D дифференциальным уравнением в полных дифференциалах, то его общий интеграл имеет вид:

$$\Phi(x,y) = C , \tag{7}$$

где $\Phi(x,y)$ – какое-либо решение ***системы дифференциальных уравнений с частными производными***:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = N(x,y). \end{cases} \qquad (8)$$

При этом совместность системы (8) обеспечивается равенством (6).

<u>*Доказательство*</u> опускается.

<u>*Замечание.*</u> Термин д.у.п.д. обусловлен тем обстоятельством, что при выполнении условия (6) существует функция двух переменных $\Phi(x,y)$, чей полный дифференциал совпадает с левой частью уравнения (1'''), то есть выполняется равенство:

$$d\Phi(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy\,. \qquad (9)$$

Из равенств (9) и (1''') немедленно следует, что $\Phi(x,y) = C$. Тот факт, что функция $\Phi(x,y)$ должна удовлетворять соотношениям (8) следует из определения дифференциала функции двух переменных:

$$d\Phi(x,y) := \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy\,.$$

К сожалению, в рамках наших лекций мы не имели возможности достаточно полно осветить вопросы, связанные с дифференцированием функций двух переменных.

<u>*Пример 6*</u>. Решим д.у. $\left(3e^{3x}y - 2x\right)dx + e^{3x}dy = 0$. Здесь $M = 3e^{3x}y - 2x,\ N = e^{3x}$. Следовательно, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3e^{3x}$, то есть данное уравнение есть д.у.п.д.

Выпишем систему (8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 3e^{3x}y - 2x \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = e^{3x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения данной системы получаем: $\Phi = \int e^{3x}dy = e^{3x}y + C(x)$ (произвольная постоянная зависит от *x*, так как интегрирование производится по *y* при разных фиксированных *x* и, таким образом, для каждого икса значение постоянной *C* может быть выбрано своим). Подставляя полученное выражение Φ в первое уравнение системы, имеем:

$$3e^{3x}y + C'(x) = 3e^{3x}y - 2x \iff C'(x) = -2x\,.$$

Таким образом, $C(x) = -\int 2x\,dx = -x^2$ (произвольную постоянную при данном интегрировании можно не писать, так как мы ищем лишь одно решение системы (8)).

Итак, $\Phi(x,y) = e^{3x}y - x^2$. По теореме 1 общий интеграл исходного д.у. имеет вид: $e^{3x}y - x^2 = C$.

<u>Определение 5</u>. Пусть д.у. (1''') ***не является*** д.у.п.д., однако существует функция $\mu(x,y)$ (обладающая в некоторой области *D* непрерывными частными производными и строго большая нуля в этой области), такая, что д.у.

$$\mu(x,y)\cdot M(x,y)dx+\mu(x,y)\cdot N(x,y)dy=0 \qquad (9)$$

уже ***является*** д.у.п.д. в области *D*. В этом случая функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем д.у. (1''') в области *D*.

В дальнейшем мы не будем выявлять область *D*, фигурирующую в определении 5, сосредоточив внимание только на методах нахождения интегрирующего множителя.

<u>Теорема 2</u>. 1) Д.у. (1''') обладает интегрирующим множителем $\mu=\mu(x)$, зависящим только от переменной *x*, тогда и только тогда, когда функция

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \qquad (10)$$

зависит только от переменной *x*.

2) Д.у. (1''') обладает интегрирующим множителем $\mu=\mu(y)$, зависящим только от переменной *y*, тогда и только тогда, когда функция

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} \qquad (11)$$

зависит только от переменной *y*.

<u>Доказательство</u>. Прежде всего заметим, что функция $\mu(x,y)$ является интегрирующим множителем д.у. (1''') тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial(\mu\cdot M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu\cdot N)}{\partial x}\ \Leftrightarrow\ \frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\mu\cdot\frac{\partial N}{\partial x}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M-\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right). \qquad (12)$$

Докажем необходимость в утверждении 1). Если $\mu=\mu(x)$ – интегрирующий множитель д.у. (1'''), зависящий только от *x*, то $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\equiv 0$ и равенство (12) переписывается в виде:

$$-\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}. \qquad (13)$$

Так как левая часть $\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{\partial\mu}{\partial x}$ зависит только от *x*, то и правая часть, совпадающая с функцией (10), зависит только от *x*, что и требовалось.

Докажем достаточность в утверждении 1). Предположим, что функция (10) зависит только от *x*, и решим следующее д.у. с разделяющимися переменными:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\Leftrightarrow\frac{d\mu}{\mu}=\left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right)dx\Leftrightarrow\mu=e^{\int\left(\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N\right)dx}. \qquad (14)$$

Ясно, что функция μ зависит только от x и для нее выполняются равносильные соотношения (13). Следовательно, для нее выполняется и соотношение (12), то есть функция $\mu=\mu(x)$ является интегрирующим множителем д.у. (1''').

Доказательство необходимости и достаточности в утверждении 2) проводится аналогично и предоставляется читателю. Отметим только, что интегрирующий множитель в данном случае находится по формуле:

$$\mu=e^{-\int\left(\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/M\right)dy} \qquad (15)$$

<u>*Пример 7*</u>. Решим д.у. $\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)dx+2\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0$. Здесь $M=2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y,\ N=2\left(y^3+x^2y+x\right)$. Сначала проверим, является ли это уравнение д.у.п.д. Имеем:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2,\ \frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2.$$

Так как (6) не выполняется, то данное уравнение не является д.у.п.д. Теперь составляем функцию (10):

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{4x^3y+4x^2+4xy^3}{2\left(y^3+x^2y+x\right)}=\frac{4x\left(y^3+x^2y+x\right)}{2\left(y^3+x^2y+x\right)}=2x.$$

Мы получили, что функция (10) зависит только от переменной x. Согласно теореме 2, рассматриваемое нами уравнение имеет интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$, который вычисляется по формуле (14):

$$\mu=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$$

(так как нам нужен лишь один интегрирующий множитель, то при вычислении интеграла в показателе мы не записываем произвольную постоянную).

Умножив исходное уравнение на интегрирующий множитель, получаем следующее д.у.п.д.:

$$e^{x^2}\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)dx+2e^{x^2}\left(y^3+x^2y+x\right)dy=0.$$

Для вычисления функции $\Phi(x,y)$ составляем систему (8):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=e^{x^2}\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right)\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=2e^{x^2}\left(y^3+x^2y+x\right)\end{cases}.$$

Из второго уравнения получаем:

$$\Phi=\int 2e^{x^2}\left(y^3+x^2y+x\right)dy=2e^{x^2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+xy\right)+C(x).$$

Подставив найденную функцию Φ в первое уравнение, имеем:

$$4xe^{x^2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+xy\right)+2e^{x^2}\left(xy^2+y\right)+C^{/}(x)=e^{x^2}\left(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ C^{/}(x)=0\ .$$

Так как нам нужна только одна функция Ф, то можно взять $C=0$. По теореме 1 общий интеграл рассматриваемого уравнения имеет вид:

$$2e^{x^2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+xy\right)=C\ .$$

<u>Пример 8</u>. Решим уравнение $\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$. Так как $\frac{\partial M}{\partial y}=8xy^3e^y+2xy^4e^y+6xy^2+1,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2xy^4e^y-2xy^2-3$, то данное уравнение не является д.у.п.д. Однако

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{8xy^3e^y+8xy^2+4}{2xy^4e^y+2xy^3+y}=\frac{4\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}{y\left(2xy^3e^y+2xy^2+1\right)}=\frac{4}{y}$$

зависит только от y, поэтому (по теореме 2) интегрирующий множитель вычисляется по формуле (15):

$$\mu=e^{-\int\frac{4}{y}dy}=e^{-4\ln|y|}=|y|^{-4}=y^{-4}\ .$$

Д.у. $y^{-4}\left(2xy^4e^y+2xy^3+y\right)dx+y^{-4}\left(x^2y^4e^y-x^2y^2-3x\right)dy=0$ есть д.у.п.д. Найдем $\Phi(x,y)$ из системы (8):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}=2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}=x^2e^y-x^2y^{-2}-3xy^{-4}.\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем:

$$\Phi=\int\left(x^2e^y-x^2y^{-2}-3xy^{-4}\right)dy=x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}+C(x)\ .$$

Подставляя в первое уравнение, получаем:

$$2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}+C^{/}(x)=2xe^y+2xy^{-1}+y^{-3}\ \Leftrightarrow C^{/}(x)=0\ .$$

Так же, как и в примере 7, выбираем самую простую функцию $C(x)$, являющуюся решением полученного уравнения, то есть $C(x)=0$. По теореме 1 общий интеграл исходного уравнения имеет вид:

$$x^2e^y+x^2y^{-1}+xy^{-3}=C\ .$$

ЧАСТЬ 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Основные определения, связанные с дифференциальными уравнениями 2-го порядка

<u>Определение 6</u>. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** 2-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x,y,y',y'')=0, \qquad (16)$$

в котором x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, $y' = y'(x)$ и $y'' = y''(x)$ – ее первая и вторая производные, а F – заданная функция четырех переменных, определенная в некоторой области пространства R^4.

Определение 7. Если из уравнения (16) можно выразить y'', то это уравнение записывается в виде

$$y'' = f(x,y,y') \qquad (16')$$

(предполагается, что функция $f(x,y,y')$ определена в некоторой области пространства R^3) и называется дифференциальным уравнением 2-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Определение 8. ***Решением*** д.у. (16), а также д.у. (16′), называется функция $y=y(x)$, определенная и дважды дифференцируемая на некотором интервале (a,b), которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает эти уравнения в тождества (то есть на (a,b), соответственно, выполняются тождества $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) \equiv 0$ или $y''(x) \equiv f\left(x, y(x), y'(x)\right)$. ***Общим решением*** д.у. (16) и (16′) называется функция

$$y = \varphi(x,C_1,C_2), \qquad (17)$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любых конкретных значениях параметров C_1 и C_2 (эти параметры называются произвольными постоянными);

б) для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$ из области определения функции $f(x,y,y')$ найдутся такие значения $C_1 = C_1^0$ и $C_2 = C_2^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}\right), \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}\right). \end{cases} \qquad (18)$$

Нахождение таких $C_1 = C_1^{(0)}$ и $C_2 = C_2^{(0)}$ из соотношений (18) называется решением задачи Коши с начальными условиями $\left(x_0, y_0, y_0'\right)$. Найденную таким образом функцию $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0)$ называют частным решением д.у.

Если, решая д.у. 2-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi\left(x,y,C_1,C_2\right)=0$, разрешив которое относительно y можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi\left(x,y,C_1,C_2\right)=0$ называют общим интегралом этого дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка

1) Пусть правая часть уравнения (16′) зависит только от x, то есть уравнение имеет вид:

$$y'' = f(x). \tag{19}$$

Тогда

$$y' = \int f(x)dx = \varphi_1(x) + C_1, \qquad y = \int \varphi_1(x)dx + C_1x = \varphi_2(x) + C_1x + C_2 .$$

2) Пусть левая часть уравнения (16) не зависит от y, то есть уравнение имеет вид:

$$F(x, y', y'') = 0 . \tag{20}$$

Если сделать замену $y' = z(x)$, то $y'' = z'(x)$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(x, z, z') = 0$, которое иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z, из соотношения $y' = z$ находим y.

3) Пусть левая часть уравнения (16) не зависит от x, то есть уравнение имеет вид:

$$F(y, y', y'') = 0 \tag{21}$$

Если сделать замену $y' = z(y)$, то по правилу дифференцирования сложной функции $y'' = z'(y) \cdot y'(x) = z' \cdot z$, и мы приходим к уравнению 1-го порядка $F(y, z, z' \cdot z) = 0$, в котором независимой переменной следует считать переменную y, а искомая функция z зависит от y. Это уравнение иногда может быть решено одним из приемов, описанных выше. Найдя z, из соотношения $y' = z(y)$ находим y.

Пример 9. Решим д.у. $y'' = 3\sin x \cos^2 x$. Оно имеет вид (19), поэтому:

$$y' = \int 3\sin x \cos^2 x dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \ \Rightarrow\ \sin x dx = -dt \end{matrix} \right| = -3\int t^2 dt = -t^3 + C_1 = -\cos^3 x + C_1 .$$

Следовательно,

$$y = -\int \cos^3 x dx + C_1 x = -\int \cos^2 x \cos x dx + C_1 x = -\int \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x dx + C_1 x =$$

$$= -\int \cos x dx + \int \sin^2 x \cos x dx + C_1 x = -\sin x + C_1 x + \int \sin^2 x \cos x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$$

$$= -\sin x + C_1 x + \int t^2 dt = -\sin x + C_1 x + \frac{t^3}{3} + C_2 = \frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + C_1 x + C_2 .$$

Пример 10. Решим д.у. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$. Оно имеет вид (20). Поэтому применяем замену $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ и сводим исходное д.у. к д.у. 1-го порядка:

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right) \ \Leftrightarrow\ z' = \frac{z}{x}\ln\left(\frac{z}{x}\right) .$$

Это д.у. является однородным д.у. 1-го порядка. Решаем его, вводя вместо z новую функцию Z:

$$Z=\frac{z}{x}\Rightarrow z=Zx\Rightarrow z'=Z'x+Z\ .$$

В результате этой замены данное уравнение приводится к д.у. с разделяющимися переменными:

$$Z'x+Z=Z\ln Z\Leftrightarrow\frac{dZ}{dx}x=Z(\ln Z-1)\Leftrightarrow x\,dZ=Z(\ln Z-1)dx\ .$$

Разделяя переменные, получаем:

$$\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow\int\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\int\frac{dx}{x}.$$

Так как $\int\frac{dZ}{Z(\ln Z-1)}=\left|\begin{matrix}t=\ln Z-1\\ dt=\dfrac{dZ}{Z}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln t=\ln(\ln Z-1)$, то

$$\ln(\ln Z-1)=\ln x+\ln C_1\Leftrightarrow\ln(\ln Z-1)=\ln(C_1x)\Leftrightarrow\ln Z-1=C_1x\Leftrightarrow Z=e^{C_1x+1}.$$

Теперь возвращаемся к старым переменным:

$$z=xe^{C_1x+1}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=xe^{C_1x+1}\Leftrightarrow dy=xe^{C_1x+1}dx\Leftrightarrow y=\int xe^{C_1x+1}dx=\left|\begin{matrix}u=x & \Rightarrow & du=dx\\ dv=e^{C_1x+1}dx & \Rightarrow & v=\dfrac{1}{C_1}e^{C_1x+1}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1}\int e^{C_1x+1}dx=\frac{x}{C_1}e^{C_1x+1}-\frac{1}{C_1^2}e^{C_1x+1}+C_2.$$

Отметим, что, как всегда, знаки равносильности понимались у нас на областях, где данные равносильности можно было записать.

<u>*Пример 11*</u>. Решим д.у. $yy''-(y')^2=y^2\ln y$. Оно имеет вид (21). Поэтому применяем замену $y'=z(y)$, $y''=z'(y)\cdot y'(x)=z'\cdot z$ и сводим исходное д.у. к д.у. 1-го порядка $yzz'-z^2=y^2\ln y$. Делением на yz приводим это уравнение к д.у. Бернулли:

$$z'-\frac{1}{y}z=y\ln y\cdot z^{-1}.$$

Разобьем решение на этапы:

а) $z=uv\Rightarrow z'=u'v+uv'\Rightarrow$

$$u'v+uv'-\frac{1}{y}uv=y\ln y\cdot u^{-1}v^{-1}\Leftrightarrow u'v+u\left[v'-\frac{1}{y}v\right]=y\ln y\cdot u^{-1}v^{-1}$$

(заметим, что так как z зависит от y, то и функции u и v зависят от y);

б) $v'-\frac{1}{y}v=0\Leftrightarrow\frac{dv}{v}=\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dy}{y}\Leftrightarrow\ln v=\ln y\Leftrightarrow v=y$;

в) $u'y=y\ln y\cdot u^{-1}y^{-1}\Leftrightarrow y\cdot\frac{du}{dy}=\ln y\cdot u^{-1}\Leftrightarrow udu=\frac{\ln y}{y}dy\Leftrightarrow\int udu=\int\frac{\ln y}{y}dy$.

Так как $\int\frac{\ln y}{y}dy=\left|\begin{matrix}t=\ln y\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|=\int tdt=\frac{t^2}{2}+C_1=\frac{\ln^2 y}{2}+C_1$, то получаем:

$$\frac{u^2}{2}=\frac{\ln^2 y}{2}+C_1\Leftrightarrow u=\sqrt{\ln^2 y+2C_1}.$$

г) $z=y\sqrt{\ln^2 y+2C_1}$.

Вспоминая теперь, что $z=\dfrac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=y\sqrt{\ln^2 y+2C_1}\ \Leftrightarrow\ \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+2C_1}}=dx\ \Leftrightarrow\ \int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+2C_1}}=x+C_2\ .$$

Так как $\displaystyle\int\frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y+2C_1}}=\left|\begin{matrix}t=\ln y\\ dt=\dfrac{dy}{y}\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2C_1}}=\ln\left(t+\sqrt{t^2+2C_1}\right)=\ln\left(\ln y+\sqrt{\ln^2 y+2C_1}\right)$,

то общий интеграл исходного д.у. имеет вид: $\ln\left(\ln y+\sqrt{\ln^2 y+2C_1}\right)=x+C_2$.

Линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами

<u>Определение 9</u>. ***Линейным однородным д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами*** называется уравнение вида:

$$y^{//}+py^{/}+qy=0\,, \qquad (22)$$

где p и q – некоторые действительные числа. ***Характеристическим уравнением*** д.у. (22) называется квадратное уравнение относительно параметра λ, получающееся из уравнения (22) формальной заменой $y^{//}$ на λ^2, $y^{/}$ на λ и y на 1.

Таким образом, характеристическое уравнение дифференциального уравнения (22) имеет вид:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0\,. \qquad (23)$$

Пусть λ_1,λ_2 – корни уравнения (23). Возможны три случая:

а) корни действительны и различны, то есть $\lambda_1\neq\lambda_2$;

б) корни действительные совпадающие, то есть $\lambda_1=\lambda_2$;

в) корни комплексные, сопряженные, то есть $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

<u>Теорема 3</u>. В каждом из случаев а), б) и в) вид общего решения д.у. (22), которое обозначается y_{00}, представлен в таблице:

Случай	Общее решение y_{00} д.у. (22)
а)	$y_{00}=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$
б)	$y_{00}=e^{\lambda_1 x}\left(C_1+C_2\cdot x\right)$
в)	$y_{00}=e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x+C_2\cos\beta x\right)$

<u>Доказательство</u> этой теоремы мы проведем позднее.

Пример 12. Решить следующие линейные однородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

1) $y'' + y' - 6y = 0$;

2) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

3) $y'' + 14y' + 53y = 0$.

Решение. 1) Характеристическое уравнение данного д.у. имеет вид $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Решаем это квадратное уравнение: $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2$. По теореме 3 (см. первую строку таблицы) получаем общее решение: $y_{00} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

2) Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$. Решая его по формуле с половинным коэффициентом, получаем: $\lambda_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-25} = 5 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 5$. По теореме 3 (см. вторую строку таблицы) получаем общее решение: $y_{00} = e^{5x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

3) Решая характеристическое уравнение $\lambda^2 + 14\lambda + 53 = 0$ по формуле с половинным коэффициентом, имеем: $\lambda_{1,2} = -7 \pm \sqrt{49-53} = -7 \pm \sqrt{-4} = -7 \pm 2i$, то есть в теореме 3 нужно выбрать третью строку: $y_{00} = e^{-7x}\left(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x\right)$.

ЧАСТЬ 2: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА

Линейные неоднородные д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Определение 10. Линейным неоднородным д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида:

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{24}$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Справедлива следующая

Теорема 4. ***Общее решение*** д.у. (24) (которое обозначается $y_{\text{он}}$) равно сумме ***общего решения*** соответствующего однородного уравнения (22) и какого-либо ***частного решения*** (которое обозначается $y_{\text{чн}}$) д.у. (24), то есть:

$$y_{\text{он}} = y_{00} + y_{\text{чн}}. \tag{25}$$

Доказательство проведем в последующих лекциях.

Общие решения линейных однородных уравнений (22) мы находить умеем. Поэтому из теоремы 4 вытекает, что для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения (24) достаточно научиться находить лишь одно частное решение этого д.у.

Займемся важным случаем, когда правая часть уравнения (24) имеет вид:

$$f(x)=e^{ax}\left[P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx\right], \quad (26)$$

где a и b – действительные числа, а $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены соответственно m-ой и n-ой степени. Метод построения частного решения д.у. (24) с такой правой частью доставляет следующая

Теорема 5. Составляем комплексное число $a+ib$, где действительные числа a и b взяты из выражения (26). Тогда в зависимости от того, является или не является число $a+ib$ корнем характеристического уравнения (23), вид $y_{\text{чн}}$ определяется таблицей:

Число $a+ib$	Вид $y_{\text{чн}}$
1. Не является корнем характеристического уравнения	$y_{\text{чн}} = e^{ax}\left[\tilde{P}_k(x)\cos bx+\tilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$
2. Является корнем характеристического уравнения кратности 1	$y_{\text{чн}} = xe^{ax}\left[\tilde{P}_k(x)\cos bx+\tilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$
3. Является корнем характеристического уравнения кратности 2	$y_{\text{чн}} = x^2e^{ax}\left[\tilde{P}_k(x)\cos bx+\tilde{Q}_k(x)\sin bx\right]$

Здесь $\tilde{P}_k(x), \tilde{Q}_k(x)$ –многочлены степени k, где $k=\max(m,n)$. Коэффициенты этих многочленов находятся методом неопределенных коэффициентов.

Доказательство проведем в последующих лекциях.

Замечание. 1) Если в выражении (26) отсутствуют тригонометрические функции, то это означает, что $b=0$, то есть нужно проверять, является ли число a корнем характеристического уравнения, и, очевидно, следует брать $k=m$. Если к тому же в (26) отсутствует показательная функция, то это означает, что $a=0$, то есть нужно проверять, является ли число 0 корнем характеристического уравнения.

2) Если $b\neq 0$ и число $a+ib$ ***является*** корнем характеристического уравнения, то известно, что сопряженное комплексное число $a-ib$ также является корнем этого уравнения, а так как рассматриваемое характеристическое уравнение – квадратное, то кратность корня $a+ib$ – единица. Поэтому вариант 3, описанный в таблице, в данном случае невозможен.

Пример 13. Решим уравнение $y''-4y=x-1$.

а) Записываем характеристическое уравнение, решаем его и находим y_{00}:

$$\lambda^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=2,\ \lambda_2=-2 \quad \Rightarrow \quad y_{00}=C_1\cdot e^{2x}+C_2\cdot e^{-2x}.$$

б) Составляем $a+ib$. Так как здесь $a=0$ и $b=0$ (см. замечание после теоремы 5), то $a+ib=0$. Число 0 не является корнем характеристического уравнения. Из теоремы 5 вытекает (см. 1-ю строку таблицы), что $y_{\text{чн}}$ = $Ax+B$, где A и B – покамест неизвестные коэффициенты. Найдем их. Подставим $y_{\text{чн}}$ в исходное уравнение. Эту подстановку удобно осуществлять следующим образом (для упрощения обозначений мы употребляем y вместо $y_{\text{чн}}$) :

$$\begin{array}{r|l|c} -4 & y & Ax+B \\ 0 & y' & A \\ 1 & y'' & 0 \\ \hline & & -4Ax-4B=x-1 \end{array}$$

Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x (в этом и заключается метод неопределенных коэффициентов):

$$\begin{array}{r|l} x & -4A=1 \Rightarrow A=-\dfrac{1}{4} \\ x^0 & -4B=-1 \Rightarrow B=\dfrac{1}{4} \end{array}$$

Итак, $y_{\text{чн}} = -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

в) Руководствуясь формулой (25), получаем:

$$y_{\text{он}} = C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}.$$

<u>*Пример 14*</u>. Решим д.у. $y''-4y'+3y=e^{5x}$.

а) Записываем характеристическое уравнение, решаем его и находим y_{00}:

$$\lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=3 \Rightarrow y_{00}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}.$$

б) Составляем $a+ib$. Так как здесь $a=5$ и $b=0$ (см. замечание после теоремы 5), то $a+ib=5$. Число 5 не является корнем характеристического уравнения. Так как многочлен, стоящий перед показательной функцией, равен 1 (то есть имеет нулевую степень), то и многочлен, входящий в состав $y_{\text{чн}}$, должен иметь нулевую степень, то есть должен быть какой-то константой. Следовательно, $y_{\text{чн}}=Ae^{5x}$. Находим A:

$$\begin{array}{r|l|c} 3 & y & Ae^{5x} \\ -4 & y' & 5Ae^{5x} \\ 1 & y'' & 25Ae^{5x} \\ \hline & & 3Ae^{5x}-20Ae^{5x}+25Ae^{5x}=e^{5x} \end{array}$$

Получаем: $8Ae^{5x}=e^{5x} \Rightarrow A=\frac{1}{8}$. То есть, $y_{\text{чн}}=\frac{e^{5x}}{8}$.

в) По теореме 4

$$y_{\text{он}}=C_1e^{x}+C_2e^{3x}+\frac{e^{5x}}{8}.$$

Пример 15. Решим д.у. $y'' - 9y' + 20y = x^2 e^{4x}$.

а) Находим y_{00}:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 5 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x}.$$

б) Так как $a = 4,\ b = 0$ и 4 является однократным корнем характеристического уравнения, то по теореме 5 (см. 2-ю строку таблицы) частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид: $y_{чн} = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)e^{4x} = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^{4x}$. Найдем коэффициенты A, B и C:

$$\begin{array}{r|l|c}
20 & y & \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^{4x} \\
-9 & y' & \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)e^{4x} + 4\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)e^{4x} = \left(4Ax^3 + 3Ax^2 + 4Bx^2 + 2Bx + 4Cx + C\right)e^{4x} \\
1 & y'' & \left(12Ax^2 + 6Ax + 8Bx + 2B + 4C\right)e^{4x} + \left(16Ax^3 + 12Ax^2 + 16Bx^2 + 8Bx + 16Cx + 4C\right)e^{4x} \\
\hline
\end{array}$$

$$20Ax^3 + 20Bx^2 + 20Cx - 36Ax^3 - 27Ax^2 - 36Bx^2 - 18Bx - 36Cx - 9C + 16Ax^3 + 24Ax^2 +$$
$$+ 16Bx^2 + 6Ax + 16Bx + 16Cx + 2B + 8C = x^2$$

Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{r|l}
x^2 & -3A = 1 \Rightarrow A = -\dfrac{1}{3} \\
x & 6A - 2B = 0 \Rightarrow -2 - 2B = 0 \Rightarrow B = -1 \\
x^0 & 2B - C = 0 \Rightarrow -2 - C = 0 \Rightarrow C = -2
\end{array}$$

Итак: $y_{чн} = -\left(\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{4x}$.

в) $y_{он} = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} - \left(\dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x\right)e^{4x}$.

Пример 16. Решим д.у. $y'' + y = 3\sin x$.

а) $\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad \Rightarrow \quad y_{00} = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x$.

б) Так как $a = 0, b = 1$, то $a + ib = i$ есть (однократный) корень характеристического уравнения. Поэтому $y_{чн} = x(A \cdot \sin x + B \cdot \cos x)$. Найдем A и B:

$$\begin{array}{r|l|c}
1 & y & x(A\sin x + B\cos x) \\
0 & y' & A\sin x + B\cos x + x(A\cos x - B\sin x) \\
1 & y'' & A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) \\
\hline
\end{array}$$

$$x(A\sin x + B\cos x) + A\cos x - B\sin x + A\cos x - B\sin x + x(-A\sin x - B\cos x) = 3\sin x$$

Итак, $-2B\sin x + 2A\cos x = 3\sin x$. Приравняем коэффициенты при $\sin x$ и при $\cos x$ (возможность такого действия связана с линейной независимостью функций $\sin x$ и $\cos x$, которая будет доказана позднее):

$$\begin{array}{r|l}
\sin x & -2B = 3 \Rightarrow B = -3/2 \\
\cos x & 2A = 0 \Rightarrow A = 0
\end{array}$$

Поэтому $y_{чн} = -\dfrac{3}{2}x\cos x$.

в) $y_{он} = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x - \dfrac{3}{2}x\cos x$.

Пример 17. Решим д.у. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$.

а) $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 4 \Rightarrow y_{00} = e^{4x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

б) Так как $a+ib=4$ есть двукратный корень характеристического уравнения, то по теореме 5 (см. 3-ю строку таблицы) частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид: $y_{чн}=Ax^2e^{4x}$. Найдем A:

$$\begin{array}{r|l|c}
16 & y & Ax^2e^{4x} \\
-8 & y' & 2Axe^{4x}+4Ax^2e^{4x} \\
1 & y'' & 2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x} \\
\hline
 & & 16Ax^2e^{4x}-16Axe^{4x}-32Ax^2e^{4x}+2Ae^{4x}+8Axe^{4x}+8Axe^{4x}+16Ax^2e^{4x}=e^{4x}
\end{array}$$

Получаем: $2Ae^{4x}=e^{4x} \Rightarrow A=\dfrac{1}{2}$. Таким образом, $y_{чн}=\dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

в) $y_{он}=e^{4x}\left(C_1+C_2x\right)+\dfrac{x^2e^{4x}}{2}$.

Теорема 6. Частное решение уравнения $y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$ можно получить в соответствии с формулой:

$$y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}, \qquad (27)$$

где $y_{чн1}$ и $y_{чн2}$ – частные решения, соответственно, уравнений $y''+py'+qy=f_1(x)$ и $y''+py'+qy=f_2(x)$.

Доказательство тривиально.

Пример 18. Решим д.у. $y''+y=xe^x+2e^{-x}$.

а) $\lambda^2+1=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2=-1 \quad \lambda_{1,2}=\pm i \quad \Rightarrow \quad y_{00}=C_1\cdot\sin x+C_2\cdot\cos x$.

б) Обозначим $f_1(x)=xe^x$, $f_2(x)=2e^{-x}$. Правой части $f_1(x)=xe^x$ соответствует $a_1+ib_1=1$, которое не является корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_{чн1}=(Ax+B)e^x.$$

Правой части $f_2(x)=2e^{-x}$ соответствует $a_2+ib_2=-1$, которое также не является корнем характеристического уравнения, поэтому

$$y_{чн2}=Ce^{-x}.$$

По теореме 6 имеем: $y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}=(Ax+B)e^x+Ce^{-x}$. Найдем A, B и C:

$$\begin{array}{r|l|c}
1 & y & (Ax+B)e^x+Ce^{-x} \\
0 & y' & Ae^x+(Ax+B)e^x-Ce^{-x} \\
1 & y'' & Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x+Ce^{-x} \\
\hline
 & & (Ax+B)e^x+Ce^{-x}+Ae^x+Ae^x+(Ax+B)e^x+Ce^{-x}=xe^x+2e^{-x}
\end{array}$$

Итак, $2Axe^x+(2A+2B)e^x+2Ce^{-x}=xe^x+2e^{-x}$. Приравнивая коэффициенты при функциях xe^x, e^x и e^{-x} (которые, как будет показано, являются линейно независимыми), получаем:

$$\begin{array}{r|c}
xe^x & 2A=1 \Rightarrow A=1/2 \\
e^x & 2A+2B=0 \Rightarrow B=-1/2 \\
e^{-x} & 2C=2 \Rightarrow C=1
\end{array}$$

Следовательно, $y_{чн}=(0{,}5x-0{,}5)e^x+e^{-x}$.

в) $y_{\text{он}} = C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x + (0{,}5x - 0{,}5)e^x + e^{-x}$.

ЧАСТЬ 3: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *n*-ГО ПОРЯДКА

Основные определения, связанные с дифференциальными уравнениями *n*-го порядка. Теорема существования и единственности решения

Определение 11. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *n*-го порядка называется уравнение вида:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,, \tag{28}$$

в котором x – независимая переменная, $y = y(x)$ – искомая функция, $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x), ..., y^{(n)} = y^{(n)}(x)$ – ее первая, вторая,...,*n*-я производные, а F – заданная функция, определенная в некоторой области пространства R^{n+2}.

Определение 12. Если из уравнения (28) можно выразить $y^{(n)}$, то это уравнение записывается в виде

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{28′}$$

(предполагается, что функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ определена в некоторой области пространства R^{n+1}) и называется дифференциальным уравнением *n*-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Определение 13. ***Решением*** д.у. (28), а также д.у. (28′), называется функция $y = y(x)$, определенная и n раз дифференцируемая на некотором интервале (a,b), которая, будучи подставлена в данные уравнения, превращает эти уравнения в тождества (то есть на (a,b), соответственно, выполняются тождества $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) \equiv 0$ или $y^{(n)}(x) \equiv f\left(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)$). ***Общим решением*** д.у. (28) и (28′) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)\,, \tag{29}$$

удовлетворяющая условиям:

а) она является решением д.у. при любых конкретных значениях параметров C_1, $C_2, ..., C_n$ (эти параметры называются произвольными постоянными);

б) для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$ из области определения функции $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ найдутся такие значения $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right) \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right) \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}\left(x_0, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0\right). \end{cases} \qquad (30)$$

Нахождение таких $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, ...,$ $C_n = C_n^0$ из соотношений (30) называется решением задачи Коши с начальными условиями $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right)$. Найденную таким образом функцию $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ называют частным решением д.у.

Если, решая д.у. *n*-го порядка, мы получаем обычное уравнение вида $\Phi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$, разрешив которое относительно *y* можно получить общее решение исходного д.у., то выражение $\Phi\left(x, y, C_1, C_2, ..., C_n\right) = 0$ называют общим интегралом этого дифференциального уравнения.

Справедлива следующая теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения (28′).

<u>*Теорема 7*</u> (теорема Коши). Пусть в некоторой области $D \subset R^{n+1}$ функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна по совокупности переменных $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ и имеет непрерывные частные производные по переменным $y, y', ..., y^{(n-1)}$. Тогда для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение $y = y(x)$ д.у. (28′), удовлетворяющее ***начальным условиям***:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_0' = y'(x_0) \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0). \end{cases} \qquad (31)$$

Это решение определено на некотором интервале $\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$, где $\delta > 0$.

<u>*Доказательство*</u> этой теоремы выходит за рамки нашей программы и поэтому опускается.

Пусть условия теоремы 7 выполнены. Обычно на практике сначала находят общее решение (29) дифференциального уравнения, а затем, решая систему

$$\begin{cases} y_0 = \varphi\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right) \\ y_0' = \varphi'\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right) \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}\left(x_0, C_1, C_2, ..., C_n\right). \end{cases} \qquad (32)$$

относительно переменных $C_1, C_2, ..., C_n$, находят значения $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, ...,$ $C_n = C_n^0$, доставляющие единственное решение $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$.

<u>*Пример 19*</u>. Найти частное решение д.у. $\left(\cos^2 x\right) \cdot y' + y = tgx$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 4$.

Ясно, что это линейное неоднородное д.у. 1-го порядка (частный случай уравнения Бернулли). Применяя метод факторизации зависимой переменной, найдем общее решение данного д.у.

а) $y = u \cdot v,\ y' = u'v + uv' \Rightarrow (\cos^2 x)u'v + (\cos^2 x)uv' + uv = tgx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x)u'v + u[(\cos^2 x)v' + v] = tgx.$$

б) $(\cos^2 x)v' + v = 0 \Leftrightarrow (\cos^2 x)\dfrac{dv}{dx} = -v \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ln v = -tgx \Leftrightarrow v = e^{-tgx}.$$

в) $(\cos^2 x)u'e^{-tgx} = tgx \Leftrightarrow \dfrac{du}{dx} = tgx \cdot e^{tgx}\dfrac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow u = \displaystyle\int tgx \cdot e^{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$$= \left| t = tgx \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \right| = \int te^t dt = te^t - e^t + C = tgx \cdot e^{tgx} - e^{tgx} + C.$$

г) $y = (tgx \cdot e^{tgx} - e^{tgx} + C)e^{-tgx} = tgx - 1 + C \cdot e^{-tgx}$.

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 4$. Подставляя в общее решение вместо x число 0, а вместо y число 4, получаем:

$$4 = tg0 - 1 + Ce^{-tg0} \Leftrightarrow C = 5.$$

Подставив теперь в общее решение $C = 5$, получаем $y = tgx - 1 + 5e^{-tgx}$.

<u>*Пример 20*</u>. Найти частное решение д.у. $yy'' - (y')^2 = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Это д.у. 2-го порядка, не содержащее независимой переменной x. Найдем сначала общее решения с помощью замены $y' = z(y),\ y'' = z' \cdot z$:

$$y \cdot z' \cdot z - z^2 = 0 \Leftrightarrow y \cdot \frac{dz}{dy} = z \Leftrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Leftrightarrow \ln z = \ln y + \ln C_1 \Leftrightarrow z = C_1 y.$$

Возвращаясь к исходной переменной, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx \Leftrightarrow \ln y = C_1 x + C_2 \Leftrightarrow y = e^{C_1 x + C_2}.$$

Для реализации начальных условий нам понадобится производная общего решения: $y' = C_1 e^{C_1 x + C_2}$. Подставляя в общее решение вместо x число 0, а вместо y число 1, получаем первое уравнение для нахождения C_1 и C_2:

$$1 = e^{C_1 \cdot 0 + C_2} \Leftrightarrow e^{C_2} = 1 \Leftrightarrow C_2 = 0.$$

Подставляя в производную общего решения вместо x число 0, а вместо y' число 2, получаем второе уравнение для нахождения C_1 и C_2:

$$2 = C_1 e^{C_1 \cdot 0} \Leftrightarrow C_1 = 2.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = e^{2x}$.

Линейные дифференциальные уравнения *n*-го порядка и теорема существования и единственности их решений

<u>*Определение 14*</u>. Линейным д.у. n-го порядка называется уравнение вида:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (33)$$

где $a_n(x),...,a_0(x), f(x)$ – известные функции, определенные и непрерывные на некотором интервале (a,b).

В дальнейшем для простоты мы будем рассматривать только те д.у. вида (33), у которых $a_n(x) \equiv 1$, то есть уравнения:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \qquad (34)$$

Теорема 8. Рассмотрим область $D \subset R^{n+1}$, заданную неравенствами:

$$D: \begin{cases} a < x < b \\ -\infty < y < +\infty \\ .... \\ -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \end{cases}$$

Тогда для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение д.у. (34), удовлетворяющее начальным условиям (31) и определенное на всем интервале (a,b).

Доказательство. Приведем д.у. (34) к виду

$$y^{(n)} = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - ... - a_1(x)y' - a_0(x)y + f(x)$$

и обозначим

$$f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = -a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - ... - a_1(x)y' - a_0(x)y + f(x).$$

Ясно, что функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ непрерывна в D по совокупности своих переменных, так как представляет собой сумму произведений непрерывных функций. Далее, ввиду принятого соглашения, частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -a_0(x),\ \frac{\partial f}{\partial y'} = -a_1(x),\ \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} = -a_{n-1}(x)$$

непрерывны на (a,b), а следовательно, и в области D. Таким образом, для нашего уравнения, которое имеет вид (28′), выполнены все условия теоремы 7, согласно которой для любой точки $\left(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$ существует единственное решение д.у. (28′), удовлетворяющее начальным условиям (31). Мы опускаем доказательство того факта, что полученное решение определено на ***всем*** интервале (a,b) (этот факт не следует из теоремы 7, которая гарантирует существование и единственность решения лишь на "малом" интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$).

Пример 21. Найти частное решение д.у. $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1,\ y'(0) = 3$.

Это линейное неоднородное д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами, поэтому оно имеет вид (34). Из теоремы 8 следует, что искомое частное решение будет единственным и будет определено на всей прямой $(-\infty, +\infty)$. Найдем сначала y_{00}.

а) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$.

б) Так как $a+ib=i$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_{\text{чн}}=A\sin x+B\cos x.$$

Найдем A и B:

$$\begin{array}{r|l|c}
-2 & y & A\sin x+B\cos x \\
1 & y' & A\cos x-B\sin x \\
1 & y'' & -A\sin x-B\cos x \\
\hline
 & & -2(A\sin x+B\cos x)+A\cos x-B\sin x-A\sin x-B\cos x=\cos x-3\sin x
\end{array}.$$

Далее:

$$\begin{array}{r|l}
\sin x & -3A-B=-3 \\
\cos x & A-3B=1.
\end{array}$$

Следовательно, $A=1,\ B=0$, то есть $y_{\text{чн}}=\sin x$.

в) $y_{\text{он}}=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\sin x$.

Будем теперь вместо $y_{\text{он}}$ писать y и вычислим производную:

$$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{x}+\cos x.$$

Используя начальные условия, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}C_1e^0+C_2e^0+\sin 0=-1\\ -2C_1e^0+C_2e^0+\cos 0=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}C_1+C_2=-1\\ -2C_1+C_2=2\end{cases} \Leftrightarrow \quad C_1=-1,\ C_2=0 \ \Rightarrow \ y=-e^{-2x}+\sin x.$$

ЧАСТЬ 3: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА (продолжение 1)

Линейно зависимые и линейно независимые системы функций

Прежде, чем приступить к проработке данного раздела, читателю рекомендуется восстановить в памяти тот материал лекций по линейной алгебре, который связан с теорией определителей, решением систем линейных уравнений, понятиями линейной независимости и линейной зависимости векторов и т.п. Это поможет глубже разобраться в структуре и идейном содержании результатов, к изложению которых мы переходим.

Определение 15. Пусть функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ определены на интервале (a,b). Если существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, такие, что для всех $x\in(a,b)$ выполняется тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+\ldots+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0,$$

то функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x)$ называются линейно зависимыми на интервале (a,b). В противном случае они называются линейно независимыми на этом интервале.

Пример 22. На числовой прямой $(-\infty,+\infty)$ рассмотрим функции: $\varphi_1(x)=\sin^2 x,\ \varphi_2(x)=\cos^2 x,\ \varphi_3(x)=1$. Из основного тригонометрического тождества следует, что $1\cdot\varphi_1(x)+1\cdot\varphi_2(x)-1\cdot\varphi_3(x)\equiv 0$. По определению 15 функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ линейно зависимы на $(-\infty,+\infty)$.

<u>*Пример 23*</u>. Если среди функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ хотя бы одна тождественно равна нулю на (a,b), то эти функции линейно зависимы на (a,b).

Действительно, если $\varphi_k(x)\equiv 0$, то линейная зависимость следует из тождества

$$0\cdot\varphi_1(x)+...+0\cdot\varphi_{k-1}(x)+1\cdot\varphi_k(x)+0\cdot\varphi_{k+1}(x)+...+0\cdot\varphi_n(x)\equiv 0$$

и из определения 15.

<u>*Пример 24*</u>. Пусть $\varphi_1(x)=1,\ \varphi_2(x)=x,\ \varphi_3(x)=x^2,...,\varphi_n(x)=x^{n-1}$. Докажем, что эти функции линейно независимы на любом интервале (a,b) действительной прямой. Предположим противное: пусть эти функции линейно зависимы на некотором интервале (a,b). Тогда по определению 15 существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, такие, что для всех $x\in(a,b)$ выполняется тождество $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+...+\alpha_n x^{n-1}\equiv 0$. Продифференцируем это тождество $n-1$ раз. Тогда все члены суммы, кроме последнего, пропадут и мы получаем равенство $\alpha_n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot 1=0$, из которого следует, что $\alpha_n=0$. Таким образом, наше тождество примет вид: $\alpha_1\cdot 1+\alpha_2 x+...+\alpha_{n-1}x^{n-2}\equiv 0$. Повторяя проведенное рассуждение, получим, что $\alpha_{n-1}=0,\ \alpha_{n-2}=0,...,\alpha_1=0$, то есть все альфы равны нулю. Противоречие!

<u>*Определение 16*</u>. Пусть функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ определены и $n-1$ раз дифференцируемы на интервале (a,b). Определителем Вронского (или вронскианом) данной системы функций называется функциональный определитель *n*-го порядка

$$W(x)=W\left[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\right]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n\\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n'\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}\end{vmatrix},$$

каждая последующая строка которого состоит из производных функций из предыдущей строки.

<u>*Теорема 9*</u>. Если функции $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ из определения 16 линейно зависимы на (a,b), то их вронскиан тождественно равен нулю на (a,b).

<u>*Доказательство*</u>. По определению 15 существуют постоянные $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, среди которых хотя бы одна отлична от нуля, такие, что для всех $x\in(a,b)$ выполняется тождество $\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$. Предположим для определенности, что $\alpha_1\neq 0$. Из полученного тождества легко получаем:

$$\varphi_1(x)\equiv\beta_2\varphi_2(x)+...+\beta_n\varphi_n(x), \qquad (35)$$

где $\beta_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}, \ldots, \beta_n = -\dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}$. Дифференцируя тождество (35) $n-1$ раз, получаем систему:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) \equiv \beta_2\varphi_2(x) + \ldots + \beta_n\varphi_n(x) \\ \varphi_1^{/}(x) \equiv \beta_2\varphi_2^{/}(x) + \ldots + \beta_n\varphi_n^{/}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \equiv \beta_2\varphi_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \beta_n\varphi_n^{(n-1)}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_1^{/}(x) \\ \ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \equiv \beta_2 \begin{pmatrix} \varphi_2(x) \\ \varphi_2^{/}(x) \\ \ldots\ldots \\ \varphi_2^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} + \ldots + \beta_n \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ \varphi_n^{/}(x) \\ \ldots\ldots \\ \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix},$$

которая выражает тот факт, что первый столбец вронскиана $W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ равен линейной комбинации остальных его столбцов. По свойствам определителя $W(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$.

<u>Следствие.</u> Если хотя бы в одной точке $x \in (a,b)$ $W(x) \neq 0$, то функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы на интервале (a,b).

<u>Пример 25</u>. Покажем, что функции $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$ – произвольные действительные числа, линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$. Применяя свойства определителей, вычислим вронскиан этой системы функций:

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} \begin{vmatrix} 1 & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Ясно, что $W(x) \neq 0$ при всех $x \in R$. По следствию из теоремы 9 данные функции линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$.

<u>Пример 26</u>. Покажем, что функции $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ и $\varphi_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$, где λ_1 – произвольное действительное число, линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$. Применяя свойства определителей, вычислим вронскиан этой системы функций:

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & x e^{\lambda_1 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_1 x} + x \cdot \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ \lambda_1 & 1 + \lambda_1 x \end{vmatrix} = e^{2\lambda_1 x}.$$

Ясно, что $W(x) \neq 0$ при всех $x \in R$. По следствию из теоремы 9 данные функции линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$.

<u>Пример 27</u>. Покажем, что функции $\varphi_1(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ и $\varphi_2(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$, где α и β – произвольные действительные числа, линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$. Вычислим вронскиан этой системы функций:

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} \sin \beta x & e^{\alpha x} \cos \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + e^{\alpha x} \cos \beta x & \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - e^{\alpha x} \sin \beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \sin \beta x & \cos \beta x \\ \alpha \sin \beta x + \cos \beta x & \alpha \cos \beta x - \sin \beta x \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \sin \beta x & \cos \beta x \\ \alpha \sin \beta x & \alpha \cos \beta x \end{vmatrix} + e^{2\alpha x} \begin{vmatrix} \sin \beta x & \cos \beta x \\ \cos \beta x & -\sin \beta x \end{vmatrix} = -e^{2\alpha x}.$$

Ясно, что $W(x) \neq 0$ при всех $x \in R$. По следствию из теоремы 9 данные функции линейно независимы на любом интервале $(a,b) \subset R$.

Основные результаты, связанные с линейными однородными д.у. n-го порядка

Определение 17. Дифференциальное уравнение (34) называется линейным ***однородным*** д.у. n-го порядка, если $f(x)=0$ при всех $x \in (a,b)$.

Итак, рассмотрим на (a,b) однородное д.у. n-го порядка

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x) y' + a_0(x) y = 0 \qquad (36)$$

и обозначим множество его решений через L.

Теорема 10. Множество L является линейным пространством, то есть если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – два каких-либо решения уравнения (36), а C_1, C_2 – произвольные действительные числа, то функция $C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$ также является решением уравнения (36).

Доказательство тривиально и предоставляется читателю в качестве обязательного упражнения.

Теорема 11. Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ представляют собой n линейно независимых ***решений*** д.у. (36). Тогда вронскиан этих функций не обращается в нуль ни в одной точке интервала (a,b).

Доказательство. Предположим противное: пусть существует точка $x_0 \in (a,b)$, такая, что $W(x_0)=0$. Составим линейную однородную систему n уравнений с неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (37)$$

Определитель этой системы совпадает с $W(x_0)$ и поэтому равен нулю. Из лекций по линейной алгебре известно, что в этом случае однородная система (37) имеет ненулевые решения. Пусть $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_n$ – одно из таких ненулевых решений. Рассмотрим функцию:

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + \ldots + \tilde{C}_n y_n(x).$$

Так как $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ являются решениями уравнения (36), то по теореме 10 функция $\tilde{y}(x)$ также является решением д.у. (36). Из соотношений (37), выполняющихся при $C_1 = \tilde{C}_1, C_2 = \tilde{C}_2, \ldots, C_n = \tilde{C}_n$, следует, что функция $\tilde{y}(x)$ удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$\begin{cases} \tilde{y}(x_0) = 0 \\ \tilde{y}'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (38)$$

С другой стороны, очевидно, что нулевая функция $\hat{y}(x) \equiv 0$ также является решением д.у. (36) и удовлетворяет начальным условиям (38). Однако, по теореме 8 существует лишь ***одно*** решение уравнения (36), удовлетворяющее начальным условиям (38). Поэтому $\tilde{y}(x) = \hat{y}(x) \equiv 0$ при всех $x \in (a,b)$, то есть $\tilde{C}_1 y_1(x) + \tilde{C}_2 y_2(x) + ... + \tilde{C}_n y_n(x) \equiv 0$. Так как среди чисел $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_n$ есть отличные от нуля, то по определению 15 функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ линейно зависимы. Полученное противоречие с условием теоремы является завершением ее доказательства.

Замечание. Системы функций, рассмотренные нами в примерах 25–27, обладали вронскианами, отличными от нуля всюду на числовой прямой. Имея в виду теорему 11, естественно задать вопрос, случайно ли это. В дальнейшем мы покажем, что никакой случайности здесь нет: мы построим линейные однородные д.у. 2-го порядка, решениями которых будут функции, рассмотренные в указанных примерах.

Определение 18. Любые n линейно независимые на интервале (a,b) функции $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathrm{L}$ называются фундаментальной системой решений д.у. (36).

Теорема 12. Д.у. (36) обладает фундаментальной системой решений.

Доказательство. Рассмотрим любой неравный нулю определитель n-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

и пусть $x_0 \in (a,b)$. По теореме 8 для каждого $k = 1,2,...,n$ существует единственное решение $y_k(x)$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{cases} y_k(x_0) = \alpha_{1k} \\ y_k^{/}(x_0) = \alpha_{2k} \\ .... \\ y_k^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{nk}. \end{cases}$$

Ясно, что в точке x_0 вронскиан системы функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ равен Δ, то есть $W(x_0) = \Delta \neq 0$. По следствию из теоремы 9 эти функции линейно независимы на интервале (a,b). Таким образом, они образуют фундаментальную систему решений д.у. (36).

ЧАСТЬ 3: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА (продолжение 2)

Конструкция общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка

С точки зрения линейной алгебры теорему 12 можно сформулировать следующим образом: базис линейного пространства L состоит не менее, чем из *n* функций. Следующая теорема показывает, что этот базис состоит ровно из *n* функций.

<u>*Теорема 13*</u>. Пусть $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathrm{L}$ есть фундаментальная система решений д.у. (36). Тогда общее решение д.у. (36) можно представить в виде:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{39}$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные.

<u>*Доказательство*</u>. Покажем, что функция (39) удовлетворяет условиям а) и б) определения 13. Тот факт, что функция (39) есть решение уравнения (36), сразу вытекает из теоремы 10. Пусть $\left(x_0, y_0, y_0^{/}, ..., y_0^{(n-1)}\right) \in D$, где область D описана в формулировке теоремы 8. Потребуем, чтобы функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ удовлетворяла начальным условиям (31):

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y^{/}(x_0) = y_0^{/} \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1^{/}(x_0) + C_2 y_2^{/}(x_0) + ... + C_n y_n^{/}(x_0) = y_0^{/} \\ .... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{40}$$

Рассмотрим (40) как систему линейных уравнений относительно $C_1, C_2, ..., C_n$. Ясно, что главный определитель этой системы равен вронскиану $W(x_0)$. Так как функции $y_1, y_2, ..., y_n \in \mathrm{L}$ образуют фундаментальную систему решений д.у. (36), то по теореме 11 вронскиан этой системы функций не обращается в нуль ни в одной точке интервала (a, b). Следовательно, $W(x_0) \neq 0$. По теореме Крамера система (40) имеет единственное решение $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, ...,$ $C_n = C_n^0$; значит при этих значениях произвольных постоянных функция (39) удовлетворяет условиям (40).

Итак, функция (39) удовлетворяет условиям а) и б) определения 13 и теорема доказана.

Для единообразия формулу (39) мы будем часто записывать в виде

$$y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{39'}$$

подчеркивая этим, что мы имеем ***общее*** решение ***однородного*** уравнения.

Теперь мы в состоянии доказать теорему 3 об общем решении д.у. (22).

<u>*Доказательство*</u> теоремы 3. а) Покажем, что функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ образуют фундаментальную систему решений д.у. (22). То, что эти функции линейно независимы, доказано в примере 25. Проверим, что они являются решениями д.у. (22). Подставим $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ в уравнение (22). Получаем для любого $x \in R$:

$$\left(e^{\lambda_1 x}\right)^{//} + p\left(e^{\lambda_1 x}\right)^{/} + q e^{\lambda_1 x} = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + p\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + q e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q\right) = 0, \quad (41$$

)

так как выражение в скобках равно нулю (λ_1 является корнем характеристического уравнения (23)). Итак, $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ – решение д.у. (22). Точно так же и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ есть решение д.у. (22). Применяя теорему 13, получаем, что общее решение д.у. (22) в этом случае имеет вид $y_{00} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$.

б) Покажем, что здесь функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ образуют фундаментальную систему решений д.у. (22). То, что эти функции линейно независимы, доказано в примере 26. Проверим, что они являются решениями д.у. (22). Для функции $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ проверка осуществляется выкладкой (41). Подставим $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ в уравнение (22). Получаем для любого $x \in R$:

$$\left(xe^{\lambda_1 x}\right)'' + p\left(xe^{\lambda_1 x}\right)' + qxe^{\lambda_1 x} = \left(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right)' + p\left(e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1 e^{\lambda_1 x}\right) + qxe^{\lambda_1 x} =$$

$$= \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + pe^{\lambda_1 x} + px\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + qxe^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}\left(2\lambda_1 + p\right) + xe^{\lambda_1 x}\left(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q\right).$$

Так как λ_1 является двукратным корнем характеристического уравнения (23), то этот корень имеет вид: $\lambda_1 = -\dfrac{p}{2}$. Поэтому выражения в обеих круглых скобках равны нулю, то есть $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$ – решение д.у. (22). По теореме 13 общее решение д.у. (22) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$y_{00} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot xe^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 + C_2 x\right).$$

в) Покажем, что в данном случае функции $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ образуют фундаментальную систему решений д.у. (22). То, что эти функции линейно независимы, доказано в примере 27. Проверим, что они являются решениями д.у. (22). Подставим $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ в уравнение (22). Получаем для любого $x \in R$:

$$\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right)'' + p\left(e^{\alpha x}\sin\beta x\right)' + qe^{\alpha x}\sin\beta x = \left(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x\right)' + p\left(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + e^{\alpha x}\beta\cos\beta x\right) +$$

$$+ qe^{\alpha x}\sin\beta x = \alpha^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + \alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha\beta e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\sin\beta x + p\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + pe^{\alpha x}\beta\cos\beta x +$$

$$+ qe^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}\sin\beta x\left(\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q\right) + e^{\alpha x}\cos\beta x\left(2\alpha\beta + p\beta\right).$$

Так как $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ есть корни характеристического уравнения (23), то по теореме Виета $-p = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\alpha$ и $q = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha^2 - (i\beta)^2 = \alpha^2 - i^2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Таким образом, $\alpha^2 - \beta^2 + p\alpha + q = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$ и $2\alpha\beta + p\beta = \beta\left(2\alpha + p\right) = 0$, поэтому $y_1 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – решение д.у. (22). Аналогично доказывается, что $y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ есть решение д.у. (22). Применяя теорему 13, получаем, что общее решение д.у. (22) в данном случае имеет вид: $y_{00} = C_1 e^{\alpha x}\sin\beta x + C_2 e^{\alpha x}\cos\beta x = e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x\right)$.

Теорема 3 полностью доказана.

Конструкция общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения *n*-го порядка

Д.у. (34), у которого правая часть $f(x)$ не равна тождественно нулю на (a,b), будем называть линейным неоднородным дифференциальным уравнением n-го порядка, а уравнение (36) будем называть ***соответствующим*** однородным уравнением. Справедлива следующая важная

<u>*Теорема 4'*</u>. ***Общее решение*** д.у. (34) (которое обозначается $y_{он}$) равно сумме ***общего решения*** соответствующего однородного уравнения (36) и какого-либо ***частного решения*** (которое обозначается $y_{чн}$) д.у. (34), то есть:

$$y_{он}=y_{00}+y_{чн}. \tag{25'}$$

<u>*Доказательство*</u>. Во-первых, все функции, входящие в состав $y_{00}+y_{чн}$, являются решениями д.у. (34), то есть входят в состав $y_{он}$ (проверьте это самостоятельно, подставив $y_{00}+y_{чн}$ вместо y в (34)). Во-вторых, если функция y есть решение д.у. (34), то есть входит в состав $y_{он}$, то функция $y–y_{чн}$ является решением д.у. (36), то есть входит в состав y_{00} (проверьте это самостоятельно, подставив $y–y_{чн}$ вместо y в (36)). Это означает, что все функции, входящие в состав $y_{он}$, входят в состав $y_{00}+y_{чн}$. Таким образом, формула (25') доказана.

Заметим, что теорема 4 является частным случаем теоремы 4'. Следовательно, теорема 4, сформулированная для линейных неоднородных д.у. 2-го порядка с постоянными коэффициентами, также доказана.

<u>*Доказательство*</u> теоремы 5. Полное доказательство теоремы 5 сопряжено с довольно утомительными выкладками. Поэтому мы рассмотрим лишь случай, когда $b=0$ и $m=0$, то есть когда $f(x)=c\cdot e^{ax}$, где c – некоторое действительное число. Во время доказательства мы будем систематически использовать легко выводимую формулу, по которой вычисляется вторая производная произведения двух функций:

$$(uv)'' = u''v+2u'v'+uv''.$$

1. Предположим, что число $a+ib=a$ не является корнем характеристического уравнения (23), то есть $a^2+pa+q\neq 0$. Докажем, что частное решение д.у. (24) можно найти в виде: $y_{чн}=Ae^{ax}$, где A – неопределенный коэффициент. Подставив это выражение в уравнение (24), получаем:

$$Aa^2e^{ax}+pAae^{ax}+qAe^{ax}=c\cdot e^{ax} \Leftrightarrow Ae^{ax}\left(a^2+pa+q\right)=c\cdot e^{ax} \Leftrightarrow A=\frac{c}{a^2+pa+q}.$$

Таким образом, $y_{чн}=\dfrac{c}{a^2+pa+q}\cdot e^{ax}$.

2. Пусть теперь $a+ib=a$ является ***однократным*** корнем характеристического уравнения (23). Это означает, что $a^2+pa+q=0$, но $a\neq -\dfrac{p}{2}$ (в случае $a=-\dfrac{p}{2}$ корень двукратен). Докажем, что частное решение д.у. (24) можно найти в виде: $y_{чн}=Axe^{ax}$, где A – неопределенный коэффициент. Подставив это выражение в уравнение (24), получаем:

$$A\left(2ae^{ax}+xa^2e^{ax}\right)+pA\left(e^{ax}+xae^{ax}\right)+qAxe^{ax}=c\cdot e^{ax}\ \Leftrightarrow\ A\left[x\left(a^2+pa+q\right)+2a+p\right]=c\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ A[2a+p]=c\ \Leftrightarrow\ A=\frac{c}{2a+p}.$$

Таким образом, $y_{\text{чн}}=\dfrac{c}{2a+p}\cdot xe^{ax}$.

3. Пусть $a+ib=a$ является ***двукратным*** корнем характеристического уравнения (23). Это означает, что $a^2+pa+q=0$ и $a=-\dfrac{p}{2}$. Докажем, что частное решение д.у. (24) можно найти в виде: $y_{\text{чн}}=Ax^2e^{ax}$, где A – неопределенный коэффициент. Подставив это выражение в уравнение (24), получаем:

$$A\left(2e^{ax}+4axe^{ax}+a^2x^2e^{ax}\right)+pA\left(2xe^{ax}+ax^2e^{ax}\right)+qAx^2e^{ax}=c\cdot e^{ax}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ A\left[x^2\left(a^2+pa+q\right)+x(4a+2p)+2\right]=c\ \Leftrightarrow\ 2A=c\ \Leftrightarrow\ A=\frac{c}{2}.$$

Таким образом, $y_{\text{чн}}=\dfrac{c}{2}\cdot x^2e^{ax}$.

<u>*Определение 19*</u>. Д.у. Эйлера 2-го порядка называется д.у. вида:

$$x^2y''+a_1xy'+a_0y=f(x), \tag{42}$$

где a_0 и a_1 – некоторые действительные числа, а $x>0$.

<u>*Теорема 14*</u>. Уравнение Эйлера (42) сводится заменой $x=e^t$, где t – новая независимая переменная, к следующему линейному уравнению 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_0y=f(e^t). \tag{43}$$

<u>*Доказательство*</u>. Ясно, что $x=e^t\ \Leftrightarrow\ t=\ln x$. Применяя цепное правило, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot e^{-t}-\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}\right)e^{-t}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Подставляя все это в д.у. (42), получаем:

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}+a_1e^t\cdot\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}+a_0y=f\left(e^t\right)\ \Leftrightarrow\ \frac{d^2y}{dt^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dt}+a_0y=f\left(e^t\right),$$

что и требовалось доказать.

<u>*Пример 28*</u>. Решим уравнение $x^2y''-3xy'+3y=3\ln^2 x$. Это д.у. Эйлера (42). Заменой $x=e^t$ данное уравнение сводится к уравнению (43):

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=3t^2.$$

а) Находим y_{00}:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_{00} = C_1 e^t + C_2 e^{3t}.$$

б) Так как $a = 0,\ b = 0$ и число 0 не является корнем характеристического уравнения, то по теореме 5 (см. 1-ю строку таблицы) частное решение нашего неоднородного уравнения имеет вид: $y_{\text{чн}} = At^2 + Bt + C$. Найдем коэффициенты A, B и C:

$$\begin{array}{r|l|c} 3 & y & At^2 + Bt + C \\ -4 & y' & 2At + B \\ 1 & y'' & 2A \\ \hline & & 3At^2 + 3Bt + 3C - 8At - 4B + 2A = 3t^2 \end{array}.$$

Приравниваем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\begin{array}{l|c} t^2 & 3A = 3 \Rightarrow A = 1 \\ t & 3B - 8A = 0 \Rightarrow B = 8/3 \\ t^0 & 3C - 4B + 2A = 0 \Rightarrow 3C = 26/3 \Rightarrow C = 26/9 \end{array}.$$

Итак: $y_{\text{чн}} = t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{26}{9}$.

в) $y_{\text{он}} = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{26}{9} = C_1 x + C_2 x^3 + \ln^2 x + \frac{8}{3} \cdot \ln x + \frac{26}{9}$.

ЧАСТЬ 3: ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *n*-ГО ПОРЯДКА (продолжение 3)

Метод вариации произвольных постоянных в применении к линейным д.у. 2-го порядка

Рассмотрим д.у.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{44}$$

Мы знаем (см. теорему 13), что общее решение соответствующего однородного д.у.

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{45}$$

имеет вид: $y_{00} = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (45). Попытаемся найти частное решение уравнения (44) в виде:

$$y = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x), \tag{46}$$

то есть, считая, что произвольные постоянные C_1 и C_2 зависят от x. Такой метод называется нахождением частного решения линейного неоднородного уравнения вариацией произвольных постоянных.

Найдем первую производную функции (46):

$$y' = C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x) =$$
$$= C_1(x) \cdot y_1'(x) + C_2(x) \cdot y_2'(x) + C_1'(x) \cdot y_1(x) + C_2'(x) \cdot y_2(x).$$

Наложим на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ требование

$$C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \tag{47}$$

и допустим, что оно выполнено. Тогда производная y' примет вид:

$$y'=C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)\,. \tag{48}$$

Продифференцируем теперь (48):

$$y''=C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)=$$
$$=C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)+C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)\,.$$

Наложим еще одно требование

$$C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \tag{49}$$

и опять допустим, что оно выполнено. Тогда вторая производная y'' примет вид:

$$y''=C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)+f(x)\,. \tag{50}$$

Подставив (46), (48) и (50) в левую часть уравнения (44), вычисляем полученное выражение:

$$C_1(x)\cdot y_1''(x)+C_2(x)\cdot y_2''(x)+f(x)+a_1(x)\cdot\left[C_1(x)\cdot y_1'(x)+C_2(x)\cdot y_2'(x)\right]+$$
$$+a_0(x)\cdot\left[C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x)\right]=C_1(x)\cdot\left[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_0(x)y_1(x)\right]+$$
$$+C_2(x)\cdot\left[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_0(x)y_2(x)\right]+f(x)=C_1(x)\cdot 0+C_2(x)\cdot 0+f(x)=f(x)\,.$$

В результате мы получили правую часть уравнения (44).

Из проведенных вычислений можно сделать вывод: если нам удастся найти функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ таким образом, чтобы выполнялись требования (47) и (49), то формула (46) доставит нам решение неоднородного уравнения (44).

Составим из соотношений (47) и (49) систему уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1(x)+C_2'(x)\cdot y_2(x)=0 \\ C_1'(x)\cdot y_1'(x)+C_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x) \end{cases}.$$

Это система линейных уравнений относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$. Главный определитель этой системы есть вронскиан $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$, который не равен нулю ни в одной точке x (см. теорему 11). Применяя правило Крамера, получаем:

$$C_1'(x)=\frac{-y_2(x)\cdot f(x)}{W(x)},\quad C_2'(x)=\frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(x)}\,. \tag{51}$$

Найдя $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, находим $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а, следовательно, и частное решение $y=C_1(x)\cdot y_1(x)+C_2(x)\cdot y_2(x)$ неоднородного уравнения (44).

<u>Пример 29</u>. Найдем общее решение д.у. $y''+y=tgx$. Так как правая часть этого уравнения не получается из формулы (26), то его частное решение нельзя

найти методом неопределенных коэффициентов. Применим метод вариации произвольных постоянных.

Сначала находим y_{00}: $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i \Rightarrow y_{00}=C_1\sin x+C_2\cos x$. Будем искать частное решение исходного уравнения в виде: $y_{\text{чн}}=C_1(x)\sin x+C_2(x)\cos x$. Вычислим вронскиан фундаментальной системы решений $y_1=\sin x,\ y_2=\cos x$. Имеем:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=-\sin^2 x-\cos^2 x=-1.$$

По формулам (51): $C_1'(x)=\dfrac{-\cos x\cdot tgx}{-1}=\sin x,\quad C_2'(x)=\dfrac{\sin x\cdot tgx}{-1}=-\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Отсюда:

$$C_1(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x,\quad C_2(x)=-\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=\int\frac{\cos^2 x-1}{\cos x}dx=\sin x-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

(произвольные постоянные при интегрировании мы не пишем, так как нам нужно найти лишь одну функцию $C_1(x)$ и одну $C_2(x)$). Таким образом:

$$y_{\text{чн}}=-\cos x\cdot\sin x+\left(\sin x-\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cdot\cos x=-\cos x\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

По теореме 4' $y_{\text{он}}=y_{00}+y_{\text{чн}}=C_1\sin x+C_2\cos x$ $\boxed{}$.

Пример 30. Решим следующее линейное неоднородное д.у. 2-го порядка с переменными коэффициентами: $xy''-y'=x^2$.

Сначала решим соответствующее однородное уравнение $xy''-y'=0$. В нем отсутствует переменная y, поэтому полагаем $y'=z,\ y''=z'$ и получаем д.у. с разделяющимися переменными:

$$xz'-z=0 \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx}=z \Leftrightarrow \frac{dz}{z}=\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln z=\ln x+\ln C_1 \Leftrightarrow z=C_1x.$$

Возвращаемся к y:

$$\frac{dy}{dx}=C_1x \Leftrightarrow dy=C_1x\,dx \Leftrightarrow y_{00}=\frac{C_1}{2}\cdot x^2+C_2.$$

Фундаментальной системой решений являются функции $y_1=\dfrac{x^2}{2}$ и $y_2=1$.

Для нахождения $y_{\text{чн}}$ применим метод вариации произвольных постоянных. Вычислим вронскиан:

$$W(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{x^2}{2} & 1\\ x & 0\end{vmatrix}=-x.$$

Чтобы применить формулы (51), поделим наше д.у. на x: $y''-\dfrac{1}{x}y'=x=f(x)$ (это нужно сделать, чтобы записать уравнение в виде (44)) . Теперь применим (51):

$$C_1'(x)=\frac{-y_2(x)\cdot f(x)}{W(x)}=\frac{-1\cdot x}{-x}=1,\quad C_2'(x)=\frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(x)}=\frac{\frac{x^2}{2}\cdot x}{-x}=-\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно: $C_1(x)=\int 1dx = x,\ C_2(x)=-\int\frac{x^2}{2}dx=-\frac{x^3}{6}$. Таким образом, $y_{чн}=x\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\cdot 1=\frac{x^3}{3}$ и $y_{он}=y_{00}+y_{чн}=\frac{C_1}{2}\cdot x^2+C_2+\frac{x^3}{3}$.

Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.

Идею применения степенных рядов для решения дифференциальных уравнений поясним на примере д.у. (45). Предположим, что в некоторой окрестности нуля функции $a_1(x)$ и $a_0(x)$ можно разложить в степенные ряды:

$$a_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n,\quad a_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n, \tag{52}$$

где p_n, q_n – известные числа. Решение д.у. (45) также будем искать в виде степенного ряда:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n, \tag{53}$$

где c_n – искомые числа. Найдем первую и вторую производную функции (53):

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}. \tag{54}$$

Подставив (52), (53) и (54) в д.у. (45), получаем:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_n x^{n-2}+\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)=0.$$

Так как степенные ряды, входящие в это равенство, абсолютно сходятся в некоторой окрестности нуля, то все последующие выкладки с этими рядами допустимы. Для нахождения неизвестных чисел c_n будем приравнивать коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l}
x^0 & 2\cdot 1\cdot c_2+p_0c_1+q_0c_0=0 \\
x^1 & 3\cdot 2\cdot c_3+p_0\cdot 2c_2+p_1c_1+q_1c_0+q_0c_1=0 \\
x^2 & 4\cdot 3\cdot c_4+p_0\cdot 3c_3+p_1\cdot 2c_2+p_2\cdot c_1+q_0c_2+q_1c_1+q_2c_0=0 \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{55}$$

Видим, что в первом уравнении системы (55) содержатся три неизвестных c_0, c_1, c_2; во втором уравнении к ним добавляется c_3; в третьем – c_4, и т.д. Из первого уравнения найдем c_2, выразив его через c_0 и c_1. Затем друг за другом выразятся $c_3, c_4, \ldots$ через c_0, c_1 и известные коэффициенты p_n, q_n. Если решение должно удовлетворять начальным условиям $y(0)=y_0,\ y'(0)=y_0'$, то мы должны соответствующим образом выбрать c_0 и c_1. Очевидно, нужно положить $c_0=y_0,\ c_1=y_0'$.

<u>*Пример 31*</u>. Решим уравнение $y'' - x^2 y = 0$. Будем искать решение в виде ряда (53). Тогда первая и вторая производные решения выразятся формулами (54). Подставив (53) и (54) в наше уравнение, получим:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0 .$$

В первой сумме сделаем замену $n-2=k$, а во второй заменим $n+2=k$. Будем иметь:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2}x^k = 0 \ \Leftrightarrow\ 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{k=2}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-2}\right]x^k = 0 .$$

Приравнивая нулю все коэффициенты полученного ряда, получаем:

$$c_2 = c_3 = 0,\ (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-2} = 0,\ k = 2,3,\ldots \Leftrightarrow c_2 = c_3 = 0,\ c_{k+2} = \frac{c_{k-2}}{(k+2)(k+1)},\ k = 2,3,\ldots .$$

Последнее соотношение позволяет найти $c_4, c_5, \ldots$ (c_0 и c_1 остаются произвольными и играют роль произвольных постоянных). Например,

$$c_4 = \frac{c_0}{4\cdot 3},\ c_5 = \frac{c_1}{5\cdot 4},\ c_6 = 0,\ c_7 = 0,\ c_8 = \frac{c_4}{8\cdot 7} = \frac{c_0}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8},\ c_9 = \frac{c_5}{9\cdot 8} = \frac{c_1}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot}$$

Нетрудно доказать, что

$$y = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot\ldots\cdot(4k-1)4k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot\ldots 4k\cdot(4k+1)}$$

(доказательство этого равенства предоставляется читателю).

С помощью степенных рядов можно решать не только д.у. вида (45).

<u>*Пример 32*</u>. Решим задачу Коши: $y' = x^3 + y^2,\ y(0) = \frac{1}{2}$. Пусть $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Тогда:

$$c_0 = y(0) = \frac{1}{2},$$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots,$$

$$y^2 = c_0^2 + 2c_0 c_1 x + \left(2c_0 c_2 + c_1^2\right)x^2 + \left(2c_0 c_3 + 2c_1 c_2\right)x^3 + \ldots$$

Подставим это в исходное уравнение:

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots = c_0^2 + 2c_0 c_1 x + \left(2c_0 c_2 + c_1^2\right)x^2 + \left(2c_0 c_3 + 2c_1 c_2 + 1\right)x^3 + \ldots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим следующую систему уравнений для нахождения c_n:

$$\begin{cases} c_1 = c_0^2 \\ 2c_2 = 2c_0 c_1 \\ 3c_3 = 2c_0 c_2 + c_1^2 \\ 4c_4 = 2c_0 c_3 + 2c_1 c_2 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_0 = \dfrac{1}{2} \\ c_1 = \dfrac{1}{4} \\ c_2 = \dfrac{1}{8} \\ c_3 = \dfrac{1}{16} \\ c_4 = \dfrac{9}{32} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Итак, решение данного уравнения найдено в виде:

$y=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\frac{9}{32}x^4+\ldots.$

ОБРАЗЕЦ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Задача 1

Решить дифференциальные уравнения:

1) $y'e^x = y\ln^2 y$;

2) $xtgydx-(x^2-2)dy=0$;

3) $y'=\frac{x+y}{y-x}$;

4) $xy'-y=(x-y)\sqrt{\ln(x-y)-\ln x}$;

5) $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$;

6) $y'\cos x=-y\sin x+2x$;

7) $x^2y'-2xy=2x^5y$;

8) $x(y'+y)=e^{-x}$;

9) $y'=\frac{1+y^2}{1-x^2}$;

10) $yy''=(y')^2$;

11) $y''=x\sqrt{y'}$;

12) $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$;

13) $3xdy=(y+6x^2)dx$;

14) $(4xy-3)y'+y^2=1$;

15) $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx$

(Ввести замену $z=\ln y+2\ln x-1$).

Задача 2

Решить линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

1) $y''-3y'+2y=0$;

2) $y''+16y=0$;

3) $y''+7y'=0$;

4) $y''-6y'+9y=0$;

5) $y''-3y'+8y=0$;

6) $y''-3y'=0$, при $y(1)=2,\ y'(1)=1$;

7) $y''+2y'+5y=0$, при

$y(0)=1,\ y'(0)=3$.

Задача 3

Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка:

1) $y''-25y=6e^{2x}$;

2) $y''+5y'+6y=x^2+4$;

3) $y''+4y=\cos 5x$;

5) $y''-4y'=4x+10$, при

$y(0)=4,\ y'(2)=-7$;

6) $y''-2y'+1y=e^x+\sin x$;

4) $y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$, при $y(1) = 4e^{-3}$, $y'(0) = 3$;

7) $y'' + 36y = xe^{-7x}$.

Задача 4

Решить методом вариации произвольной постоянной:

1) $y'' - 3y + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$;

2) $y'' - 25y = 6e^{2x}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Решение задачи 1

1) Решить дифференциальное уравнение: $y'e^x = y\ln^2 y$.

Преобразуем данное уравнение: $y' = \dfrac{y\ln^2 y}{e^x}$;

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln^2 y}{e^x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y\ln^2 y} = \frac{dx}{e^x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y\ln^2 y} = \int e^{-x} dx.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int \frac{dy}{y\ln^2 y} = \left| \begin{array}{l} \ln y = t \\ \dfrac{1}{y} dy = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = -t^{-1} + C = -\frac{1}{\ln y} + C;$$

Таким образом, получаем:

$$-\frac{1}{\ln y} = -e^{-x} + C \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{e^{-x} - C} \Leftrightarrow y = e^{\left(\frac{1}{e^{-x} - C}\right)}.$$

2) Решить дифференциальное уравнение: $xtgydx - (x^2 - 2)dy = 0$.

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dy}{tgy} = \frac{x}{(x^2 - 2)} dx \Leftrightarrow \int ctgy\, dy = \int \frac{x}{(x^2 - 2)} dx.$$

Второй интеграл найдем методом подстановки:

$$\int \frac{x}{(x^2-2)}dx = \left| \begin{array}{l} x^2-2=t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + \ln C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2\right| + \ln C = \ln\left(\left|x^2-2\right|^{\frac{1}{2}} \cdot C\right)$$

Получим общий интеграл исходного уравнения: $\ln|\sin y| = \ln\left(\left|x^2-2\right|^{\frac{1}{2}} \cdot C\right)$, где C — произвольная положительная постоянная.

Из полученного равенства выразим y:

$\sin y = \left|x^2-2\right|^{\frac{1}{2}} \cdot C_1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \arcsin\left(\left|x^2-2\right|^{\frac{1}{2}} \cdot C_1\right)$, где C_1 — произвольная постоянная.

3) Решить дифференциальное уравнение: $y' = \dfrac{x+y}{y-x}$.

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части уравнения на x. Полученное уравнение имеет вид (4): $y' = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1}$.

Для решения этого уравнения введем замену: $\dfrac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z$.

Получаем:

$$z'x + z = \frac{1+z}{z-1} \Rightarrow z'x = \frac{1+2z-z^2}{z-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{z^2-2z-1}{(z-1)x} \Rightarrow \frac{(z-1)dz}{z^2-2z-1} = -\frac{dx}{x}$$

В полученном уравнении переменные разделены, поэтому можно брать интегралы от левой и правой частей:

$$\int \frac{(z-1)dz}{z^2-2z-1} = -\int \frac{dx}{x}.$$

Вычислим первый интеграл:

$$\int\frac{(z-1)dz}{z^2-2z-1}=\int\frac{(z-1)dz}{(z-1)^2-2}=\left|\begin{array}{l}(z-1)^2-2=t\\2(z-1)dz=dt\\(z-1)dz=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(z-1)^2-2\right|+C$$

Имеем:

$$\frac{1}{2}\ln\left|(z-1)^2-2\right|=-\ln|x|+C\Rightarrow\ln\left|(z-1)^2-2\right|=-2\ln|x|+\ln C_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ln\left|(z-1)^2-2\right|=\ln(x^{-2}C_1)\Rightarrow\left|(z-1)^2-2\right|=x^{-2}C_1\Rightarrow(z-1)^2-2=\pm C_1x^{-2},$$

где C_1 — произвольная положительная постоянная.

Последнее выражение можно записать одной формулой:

$$(z-1)^2-2=Cx^{-2},$$

где С — произвольная постоянная.

Таким образом, получаем: $z=\sqrt{Cx^{-2}+2}+1$.

Общее решение имеет вид: $y=x\left(\sqrt{Cx^{-2}+2}+1\right)$.

4) Решить дифференциальное уравнение: $xy'-y=(x-y)\sqrt{\ln(x-y)-\ln x}$.

Преобразуем данное уравнение: $y'-\frac{y}{x}=(1-\frac{y}{x})\sqrt{\ln(1-\frac{y}{x})}$ — это однородное д.у. первого порядка (см. (4)).

Как и в предыдущей задаче введем замену: $\frac{y}{x}=z,\quad y'=z'x+z$.

Получаем:

$$z'x+z-z=(1-z)\sqrt{\ln(1-z)}\Rightarrow\frac{dz}{dx}=\frac{(1-z)\sqrt{\ln(1-z)}}{x}\Rightarrow\frac{dz}{(1-z)\sqrt{\ln(1-z)}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{dz}{(1-z)\sqrt{\ln(1-z)}}=\int\frac{dx}{x}.$$

Вычислим интеграл, стоящий в левой части равенства:

$$\int\frac{dz}{(1-z)\sqrt{\ln(1-z)}}=\left|\begin{array}{l}\ln(1-z)=t\\-\frac{1}{1-z}dz=dt\end{array}\right|=-\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-2\sqrt{t}=-2\sqrt{\ln(1-z)}.$$

Имеем:

$$-2\sqrt{\ln(1-z)} = \ln|x| + \ln C \;\Rightarrow \sqrt{\ln(1-z)} = -\frac{1}{2}\ln C|x| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1-z) = \ln^2\left(\sqrt{C|x|}\right) \Rightarrow z = 1 - e^{\ln^2 \sqrt{C|x|}},$$

где C — произвольная положительная постоянная.

Получаем общее решение исходного д.у.: $y = x\left(1 - e^{\ln^2 \sqrt{C|x|}}\right)$.

5) Решить дифференциальное уравнение: $xy' = xe^{-\frac{y}{x}} + y$.

Разделим обе части уравнения на x. Исходное уравнение примет вид (4):

$$y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Введем следующую замену: $\dfrac{y}{x} = z, \quad y' = z'x + z$.

Тогда получим:

$$z'x + z = e^{-z} + z \;\Rightarrow\; z' = \frac{e^{-z}}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{e^{-z}}{x} \;\Rightarrow\; e^z dz = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int e^z dz = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^z = \ln|x| + C \;\Rightarrow\; z = \ln\left(\ln|x| + C\right).$$

Общее решение имеет вид: $y = x\ln\left(\ln|x| + C\right)$.

6) Решить дифференциальное уравнение: $y'\cos x = -y\sin x + 2x$.

Преобразуем исходное д.у., разделив обе его части на $\cos x$. Получим линейное неоднородное д.у. 1-го порядка (см. (5)): $y' + ytgx = \dfrac{2x}{\cos x}$.

Разобьем решение этого уравнения на несколько этапов.

а) $y = uv, \;\; y' = u'v + uv' \;\Rightarrow\; u'v + uv' + uvtgx = \dfrac{2x}{\cos x} \;\Leftrightarrow\; u'v + u[v' + vtgx] = \dfrac{2x}{\cos x}$.

б) $v' + vtgx = 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = -vtgx \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dv}{v} = -tgxdx \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx \;\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\; \ln|v| = \ln|\cos x| \;\Leftrightarrow\; v = \cos x$.

Заметим, что при вычислении v знак модуля мы просто опустили, так как согласно общей методике достаточно иметь одну функцию v, обращающую в нуль квадратные скобки.

в) $u'\cos x = \dfrac{2x}{\cos x} \;\Leftrightarrow\; u' = \dfrac{2x}{\cos^2 x} \;\Leftrightarrow\; u = 2\int \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$.

К полученному интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} & u = x \\ v = tgx & du = dx \end{matrix} \right| = x\,tgx - \int tgxdx = x\,tgx + \ln|\cos x| + C.$$

Таким образом получаем: $u = 2\left(x\,tgx + \ln|\cos x| + C\right)$.

г) Общее решение имеет вид: $y = 2\cos x(x\,tgx + \ln|\cos x| + C)$.

7) Решить дифференциальное уравнение: $x^2 y' - 2xy = 2x^5 y$.

Приведем данное д.у. к виду (5): $y' - \dfrac{2y}{x} = 2x^3 y$.

а) $y = uv,\;\; y' = u'v + uv' \;\Rightarrow\; u'v + uv' - \dfrac{2uv}{x} = 2x^3 uv \;\Rightarrow\; u'v + u\left[v' - \dfrac{2v}{x}\right] = 2x^3 uv$.

б) $v' - \dfrac{2v}{x} = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2v}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = \dfrac{2dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \dfrac{dv}{v} = 2\int \dfrac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|v| = 2\ln|x| \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \ln|v| = \ln x^2 \;\Rightarrow\; v = x^2$.

в) $u'x^2 = 2x^5 u \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{dx} = 2x^3 u \;\Rightarrow\; \dfrac{du}{u} = 2x^3 dx \;\Rightarrow\; \int \dfrac{du}{u} = \int 2x^3 dx \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \ln|u| = \dfrac{1}{2}x^4 + C \;\Rightarrow\; u = e^{\frac{1}{2}x^4 + C}$.

г) $y = \left(e^{\frac{1}{2}x^4 + C}\right)x^2$ — это общее решение данного д.у.

8) Решить дифференциальное уравнение: $x(y' + y) = e^{-x}$.

Преобразовав исходное уравнение, получим д.у. вида (5): $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

а) $y = uv,\;\; y' = u'v + uv' \;\Rightarrow\; u'v + uv' + uv = \dfrac{e^{-x}}{x} \;\Rightarrow\; u'v + u[v' + v] = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

б) $v' + v = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = -v \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{v} = -dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = -x \;\Rightarrow\; v = e^{-x}$.

в) $u'e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{x} \;\Rightarrow\; u' = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; u = \int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.

г) Общее решение исходного д.у.: $y = (\ln|x| + C)e^{-x}$.

9) Решить дифференциальное уравнение: $y' = \dfrac{1+y^2}{1-x^2}$.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1-x^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1-x^2} \;\Leftrightarrow\; \int\frac{dy}{1+y^2} = \int\frac{dx}{1-x^2} \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; arctg\, y = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

Последнее выражение есть общий интеграл исходного д.у.

10) Решить дифференциальное уравнение: $yy'' = (y')^2$.

Данное уравнение имеет вид (21). Поэтому применим замену $y' = z(y),\; y'' = z'(y)\cdot y'(x) = z'(y)\cdot z$ и сведем исходное д.у. к д.у. 1-го порядка:

$$y\,z' = z^2 \Leftrightarrow z' = \frac{z^2}{y}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z^2}{y} \;\Leftrightarrow\; \frac{dz}{z^2} = \frac{dy}{y} \;\Leftrightarrow \int\frac{dz}{z^2} = \int\frac{dy}{y} \;\Leftrightarrow -z^{-1} = \ln|y| + C_1 \;\Leftrightarrow\; z = -\frac{1}{\ln|y| + C_1}.$$

Вспоминая теперь, что $z = \dfrac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\ln|y| + C_1} \;\Leftrightarrow\; (\ln|y| + C_1)dy = -dx \;\Leftrightarrow\; \int(\ln|y| + C_1)dy = -\int dx.$$

Рассмотрим два случая.

Если $y > 0$, то $|y| = y$.

Так как $\int \ln y dy = \begin{vmatrix} dv = dy & u = \ln y \\ v = y & du = \dfrac{dy}{y} \end{vmatrix} = y\ln y - \int dy = y\ln y - y$, то общий интеграл исходного д.у. имеет вид: $y\ln y - y + C_1 y = -x + C_2$.

Если $y < 0$, то $|y| = -y$ и тогда

$$\int \ln(-y)dy = \begin{vmatrix} dv = dy & u = \ln(-y) \\ v = y & du = -\dfrac{dy}{y} \end{vmatrix} = y\ln(-y) + \int dy = y\ln(-y) + y.$$

Общий интеграл исходного д.у. в этом случае примет вид: $y\ln(-y) + y + C_1 y = -x + C_2$.

11) Решить дифференциальное уравнение: $y'' = x\sqrt{y'}$.

Это уравнение имеет вид (20). Поэтому используя замену $y' = z(x),\ \ y'' = z'(x)$, сведем исходное д.у. к уравнению 1-го порядка: $z' = x\sqrt{z}$.

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{dx} = x\sqrt{z} \ \Leftrightarrow\ \frac{dz}{\sqrt{z}} = xdx \ \Leftrightarrow\ \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int xdx \ \Leftrightarrow\ 2\sqrt{z} = \frac{x^2}{2} + C_1 \ \Leftrightarrow\ z = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2.$$

Теперь, возвращаемся к старым переменным:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad dy = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}\right)^2 dx \quad \Leftrightarrow \quad y = \int \left(\frac{x^4}{16} + \frac{C_1 x^2}{4} + \frac{C_1^{\ 2}}{4}\right)dx \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = \frac{1}{4}\left(\frac{x^5}{20} + \frac{C_1 x^3}{3} + C_1^{\ 2} x\right) + C_2.$$

12) Решить дифференциальное уравнение: $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1}y' = 2x$.

Это уравнение, так же как и предыдущее, сводится к д.у. 1-го порядка заменой $y' = z(x),\ \ y'' = z'(x)$ (см (20)).

Получаем д.у.: $z' + \dfrac{2x}{x^2+1}z = 2x$ Полученное уравнение имеет вид (5). Разобьем решение на несколько этапов.

а) $z = uv,\ \ z' = u'v + uv' \Rightarrow u'v + uv' + \dfrac{2x}{x^2+1}uv = 2x \Rightarrow u'v + u\left[v' + \dfrac{2x}{x^2+1}v\right] = 2x$.

б) $v' + \dfrac{2x}{x^2+1}v = 0 \ \Rightarrow\ \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{2x}{x^2+1}v \ \Rightarrow\ \dfrac{dv}{v} = -\dfrac{2x}{x^2+1}dx \ \Rightarrow\ \int\dfrac{dv}{v} = -\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx$

Вычислим второй интеграл:

$$\int\frac{2x}{x^2+1}dx = \left|\begin{matrix} x^2+1 = t \\ 2xdx = dt \end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x^2+1\right| + C.$$

Таким образом, получаем: $\ln|v| = -\ln\left|x^2+1\right| \ \Rightarrow\ v = \dfrac{1}{x^2+1}$.

в) $u'\dfrac{1}{x^2+1} = 2x \ \Rightarrow\ u' = 2x^3 + 2x \ \Rightarrow\ u = \int\left(2x^3+2x\right)dx \Rightarrow .u = \dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + C_1$

г) $z = \left(\dfrac{1}{2}x^4 + x^2 + C_1\right)\dfrac{1}{x^2+1}$.

Теперь подставляем найденную функцию z в равенство $y' = z$:

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^4 + x^2 + C_1\right)\frac{1}{x^2+1} \ \Leftrightarrow\ y = \frac{1}{2}\int\frac{x^4 + 2x^2 + 1 + 2C_1 - 1}{x^2+1}dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = \frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1\right)^2 + 2C_1 - 1}{x^2+1}dx \ \Leftrightarrow\ y = \frac{1}{2}\int\left(x^2 + 1 + \frac{2C_1 - 1}{x^2+1}\right)dx \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ y = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + x + \left(2C_1 - 1\right)arctg\,x\right) + C_2.$$

13) Решить дифференциальное уравнение: $3xdy = (y + 6x^2)dx$.

Преобразуем исходное д.у. следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y+6x^2)}{3x} \ \Leftrightarrow\ y' - \frac{1}{3x}y = 2x.$$

Получили линейное неоднородное д.у. 1-го порядка (см (5)).

Так же как и в предыдущих примерах, проведем решение в несколько этапов.

а) $y = uv,\ \ y' = u'v + uv' \ \Rightarrow\ u'v + uv' - \dfrac{1}{3x}uv = 2x \ \Rightarrow\ u'v + u\left[v' - \dfrac{1}{3x}v\right] = 2x$.

б) $v' - \dfrac{1}{3x}v = 0 \ \Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{3x}v \ \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{3x} \ \Rightarrow \int\dfrac{dv}{v} = \int\dfrac{dx}{3x} \ \Rightarrow \ln|v| = \dfrac{1}{3}\ln|x| \Rightarrow v = \sqrt[3]{x}$.

в) $u'\sqrt[3]{x}=2x \Rightarrow u'=2x^{2/3} \Rightarrow u=2\int x^{2/3}dx \Rightarrow u=\dfrac{6x^{5/3}}{5}+C$.

г) $y=\left(\dfrac{6x^{5/3}}{5}+C\right)x^{1/3}=\dfrac{6}{5}x^2+Cx^{1/3}$.

14) Решить дифференциальное уравнение: $(2xy-3)y'+y^2=1$.

Решение данного д.у. будем искать в виде: $x=x(y)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y^2}{2xy-3} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{2xy-3}{y^2-1} \Rightarrow \frac{dx}{dy}+\frac{2y}{y^2-1}x=\frac{3}{y^2-1}.$$

а) $x=u(y)\cdot v(y)$, $\dfrac{dx}{dy}=u'v+uv' \Rightarrow u'v+uv'+\dfrac{2y}{y^2-1}uv=\dfrac{3}{y^2-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u'v+u\left[v'+\frac{2y}{y^2-1}v\right]=\frac{3}{y^2-1}.$$

б) $v'+\dfrac{2y}{y^2-1}v=0 \Rightarrow \dfrac{dv}{dy}=\dfrac{2y}{y^2-1}v \Rightarrow \dfrac{dv}{v}=\dfrac{2y}{y^2-1}dy \Rightarrow \int\dfrac{dv}{v}=\int\dfrac{2y}{y^2-1}dy$.

Второй интеграл найдем методом подстановки:

$$\int\frac{2y}{y^2-1}dy=\begin{vmatrix} y^2-1=t \\ 2ydy=dt \end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln(y^2-1)+C.$$

Имеем: $\ln|v|=\ln(y^2-1) \Rightarrow v=(y^2-1)$.

в) $u'(y^2-1)=\dfrac{3}{y^2-1} \Rightarrow u'=\dfrac{3}{(y^2-1)^2} \Rightarrow u=3\int\dfrac{1}{(y^2-1)^2}dy$.

Используя таблицы интегралов, получаем: $u=3\left(\dfrac{y}{2(1-y^2)}+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|\right)+C$.

г) $x=\left(\dfrac{3y}{2(1-y^2)}+\dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|+C\right)(y^2-1)=-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{3}{4}(y^2-1)\ln\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right|+C(y^2-1)$.

15) Решить дифференциальное уравнение: $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2ydx$.

Разделим обе части данного д.у. на y: $x(\ln y+2\ln x-1)\dfrac{dy}{y}=2dx$.

Сделаем замену переменных: $z=(\ln y+2\ln x-1)$.

Тогда $dz=\frac{1}{y}dy+\frac{2}{x}dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=dz-\frac{2}{x}dx$.

Исходное уравнение примет вид: $xz\left(dz-\frac{2}{x}dx\right)=2dx \Leftrightarrow xzdz=2(1+z)dx$.

Разделим переменные: $\frac{zdz}{(1+z)}=2\frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int\left(1-\frac{1}{(1+z)}\right)dz=2\int\frac{dx}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z-\ln|1+z|=2\ln|x|+C \Leftrightarrow z=\ln|1+z|+2\ln|x|+C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z=\ln|(1+z)x|+C$.

Возвращаясь к старым переменным, получаем общий интеграл исходного уравнения: $\ln y+2\ln x-1=\ln|(\ln y+2\ln x)x|+C$.

<u>Решение задачи 2</u>

1) Решить дифференциальное уравнение: $y''-3y'+2y=0$.

Характеристическое уравнение данного д.у. имеет вид: $\lambda^2-3\lambda+2=0$.

Решаем это квадратное уравнение: $\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=1$. По теореме 3 получаем общее решение: $y_{oo}=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$.

2) Решить дифференциальное уравнение: $y''+16y=0$.

Составим характеристическое уравнение: $\lambda^2+16=0$. Решая его, получаем: $\lambda^2=-16 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm\sqrt{-16}=\pm4i$. По теореме 3 (см. третью строку) получаем общее решение данного д.у.: $y_{oo}=C_1\sin4x+C_2\cos4x$.

3) Решить дифференциальное уравнение: $y''+7y'=0$.

Решим характеристическое уравнение: $\lambda^2+7\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=-7$. Тогда, общее решение имеет вид: $y_{oo}=C_1+C_2e^{-7x}$ (см. теорему 7).

4) Решить дифференциальное уравнение: $y''-6y'+9y=0$.

Запишем характеристическое уравнение: $\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=3$.

Воспользуемся второй строкой таблицы из теоремы 3. Получаем общее решение исходного д.у.: $y_{oo}=e^{3x}(C_1+C_2x)$.

5) Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 3y' + 8y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2 - 3\lambda + 8 = 0 \Rightarrow$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{-23}}{6} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{6} i$. Тогда общее решение данного д.у. найдем, используя третью строку из теоремы 3: $y_{oo} = e^{\frac{1}{2}x}\left(C_1 \sin\dfrac{\sqrt{23}}{6}x + C_2 \cos\dfrac{\sqrt{23}}{6}x\right)$.

6) Найти частное решение д.у. $y'' - 3y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = 2,\ y'(1) = 1$.

Найдем общее решение: $\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow y_{oo} = C_1 + C_2 e^{3x}$.

Для реализации начальных условий нам понадобится производная общего решения: $y'_{oo} = 3C_2 e^{3x}$. Подставляя в общее решение и его производную вместо x число 1, а вместо y соответствующие числа, получаем систему уравнений для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 e^3 = 2, \\ 3C_2 e^3 = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $C_2 = \dfrac{1}{3e^3}$, $C_1 = \dfrac{5}{3}$.

Таким образом, искомое частное решение имеет вид: $y_{чо} = \dfrac{5}{3} + \dfrac{1}{3e^3} e^{3x}$.

7) Найти частное решение д.у. $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 2i \Rightarrow y_{oo} = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$.

Найдем $y'_{oo} = -e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + e^{-x}(2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x)$.

Используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} C_2 = 1, \\ -C_2 + 2C_1 = 1; \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2.$$

Частное решение данного уравнения имеет вид: $y_{чо} = e^{-x}(2\sin 2x + \cos 2x)$.

Решение задачи 3

1) Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 25y = 6e^{2x}$.

а) Записываем характеристическое уравнение, решаем его и находим y_{00}:

$$\lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 5 \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x}.$$

б) Частное решение исходного неоднородного уравнения имеет вид: $y_{чн} = Ae^{2x}$, где A — неизвестный коэффициент. Подставив $y_{чн}$ в исходное уравнение, найдем A.

-25	y	Ae^{2x}
0	y'	$2Ae^{2x}$
1	y''	$4Ae^{2x}$

$4Ae^{2x} - 25Ae^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow -21Ae^{2x} = 6e^{2x} \Rightarrow A = -\dfrac{6}{21}$.

Итак, $y_{чн} = -\dfrac{6}{21}e^{2x}$.

в) Руководствуясь формулой (25), получаем:

$$y_{он} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{21}e^{2x}.$$

2) Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 5y' + 6y = x^2 + 4$.

а) Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -3 \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

б) Частное решение данного уравнения будем искать в следующем виде: $y_{чн} = Ax^2 + Bx + C$. Подставляя $y_{чн}$ в исходное уравнение, получим:

$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 4$;

$6Ax^2 + (10A + 6B)x + 2A + 5B + 6C = x^2 + 4$.

Приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях x:

x^2	$6A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{6}$
x	$10A + 6B = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{5}{18}$

x^0	$2A+5B+6C=4 \Rightarrow C=\dfrac{91}{108}$

Таким образом, получаем: $y_{чн}=\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{5}{18}x+\dfrac{91}{108}$.

в) Итак, $y_{он}=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{5}{18}x+\dfrac{91}{108}$.

3) Решить дифференциальное уравнение: $y''+4y=\cos 5x$.

а) Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i \Rightarrow y_{oo}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x.$$

б) $y_{чн}=A\sin 5x+B\cos 5x$. Найдем A и B:

4	y	$A\sin 5x+B\cos 5x$
0	y'	$5A\cos 5x-5B\sin 5x$
1	y''	$-25A\sin 5x-25B\cos 5x$

$$-25A\sin 5x-25B\cos 5x+4A\sin 5x+4B\cos 5x=\cos 5x.$$

Приравняем коэффициенты при $\sin 5x$ и при $\cos 5x$:

$\sin 5x$	$-21A=0 \Rightarrow A=0$
$\cos 5x$	$-21B=1 \Rightarrow B=-\dfrac{1}{21}$

Итак, $y_{чн}=-\dfrac{1}{21}\cos 5x$.

в) $y_{он}=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x+-\dfrac{1}{21}\cos 5x$.

4) Найти частное решение д.у. $y''+6y'+9y=4e^{-3x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=4e^{-3}$, $y'(0)=3$.

а) $\lambda^2+6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-3 \Rightarrow y_{oo}=e^{-3x}(C_1+C_2x)$.

б) Так как $\lambda_1=\lambda_2=-3$, то частное решение данного уравнения будем искать в виде: $y_{чн}=Ax^2e^{-3x}$.

9	y	Ax^2e^{-3x}
6	y'	$2Axe^{-3x}-3Ax^2e^{-3x}$

$$\begin{array}{c|c|l} 1 & y'' & 2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x} \\ \hline \end{array}$$

$$2Ae^{-3x}-12Axe^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}+12Axe^{-3x}-18Ax^2e^{-3x}+9Ax^2e^{-3x}=4e^{-3x}$$

Получаем: $2Ae^{-3x}=4e^{-3x} \Rightarrow A=2$. То есть, $y_{чн}=2x^2e^{-3x}$.

в) $y_{он}=e^{-3x}(C_1+C_2x)+2x^2e^{-3x}$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=4e^{-3}$, $y'(0)=3$

Вычислим производную общего решения:

$$y'_{он}=-3e^{-3x}(C_1+C_2x)+C_2e^{-3x}+4xe^{-3x}-6x^2e^{-3x}.$$

Используя начальные условия, получим систему для нахождения C_1 и C_2:

$$\begin{cases} e^{-3}(C_1+C_2)+2e^{-3}=4e^{-3}, \\ -3C_1+C_2=3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (C_1+C_2)=2, \\ -3C_1+C_2=3; \end{cases} \Rightarrow C_1=-\frac{1}{4},\ C_2=\frac{9}{4}.$$

Таким образом, получаем: $y \ =e^{-3x}\left(-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}x\right)+2x^2e^{-3x}$.

5) Найти частное решение д.у. $y''-4y'=4x+10$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=4,\ y'(2)=-7$.

а) $\lambda^2-4\lambda=0 \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=4 \Rightarrow y_{оо}=C_1+C_2e^{4x}$.

б) Так как $\lambda_1=0$, то $y_{чн}=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$.

Подставляя в исходное уравнение $y_{чн}$, получаем:

$$2A-4(Ax+B)=4x+10 \ \Rightarrow\ -4Ax+2A-4B=4x+10 \ \Rightarrow\ \begin{cases} -4A=4, \\ 2A-4B=10; \end{cases} \ \Rightarrow$$

$A=-1,\ B=-3$. Тогда $y_{чн}=-x^2-3x$.

в) $y_{он}=C_1+C_2e^{4x}-x^2-3x$.

Найдем частное решение исходного д.у., удовлетворяющее условиям $y(0)=4,\ y'(2)=-7$.

Имеем: $y'_{он}=4C_2e^{4x}-2x-3$. С учетом начальных условий получаем:

$$\begin{cases} C_1+C_2=4, \\ 4C_2e^8-7=-7; \end{cases} \Rightarrow C_2=0,\ C_1=4.$$

Таким образом, искомое частное решение данного д.у. имеет вид:

$$y = 4 - x^2 - 3x.$$

6) Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 2y' - 3y = e^x + \sin x$.

а) $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3 \Rightarrow y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

б) По теореме 8 частное решение данного уравнения надо искать в виде: $y_{чн} = Axe^x + B\sin x + C\cos x$.

$$\begin{array}{c|c|l}
-3 & y & Axe^x + B\sin x + C\cos x \\
2 & y' & Ae^x + Axe^x + B\cos x - C\sin x \\
1 & y'' & 2Ae^x + Axe^x - B\sin x - C\cos x \\
\hline
\end{array}$$

$$-3Axe^x - 3B\sin x - 3C\cos x + 2Ae^x + 2Axe^x + 2B\cos x - 2C\sin x + 2Ae^x + Axe^x -$$
$$- B\sin x - C\cos x = e^x + \sin x.$$

Итак, $4Ae^x + (2B + 2C)\cos x + (2B - 2C)\sin x = e^x + \sin x.$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 4A = 1, \\ 2B + 2C = 0, \\ 2B - 2C = 1. \end{cases}$$

Откуда находим $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = -\frac{1}{4}$. Итак, $y_{чн} = \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x$.

в) $y_{он} = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{4}\sin x - \frac{1}{4}\cos x$.

7) Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 36y = 5xe^{-7x}$.

а) $\lambda^2 + 36 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -36 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-36} = \pm 6i \Rightarrow y_{oo} = C_1 \sin 6x + C_2 \cos 6x$.

б) Частное решение исходного д.у. имеет вид: $y_{чн} = (Ax + B)e^{-7x}$.

Найдем коэффициенты A и B.

$$y'_{чн} = Ae^{-7x} - 7(Ax + B)e^{-7x}, \; y''_{чн} = -14Ae^{-7x} + 49(Ax + B)e^{-7x}.$$

Подставляя $y_{чн}$ и $y''_{чн}$ в исходное уравнение, получим:

$$-14Ae^{-7x} + 49(Ax + B)e^{-7x} + 36(Ax + B)e^{-7x} = 5xe^{-7x},$$

$$(-14A + 85B)e^{-7x} + 85Axe^{-7x} = 5xe^{-7x}.$$

Из последнего равенства получим систему:

$$\begin{cases} 85A = 5, \\ -14A + 85B = 0; \end{cases}$$

Откуда находим $A = \dfrac{1}{17}$, $B = \dfrac{14}{1445}$.

Тогда $y_{чн} = \left(\dfrac{1}{17}x + \dfrac{14}{1445}\right)e^{-7x}$.

г) $y_{он} = C_1 \sin 6x + C_2 \cos 6x + \left(\dfrac{1}{17}x + \dfrac{14}{1445}\right)e^{-7x}$.

Решение задачи 4

1) Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 3y + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$.

Применим метод вариации произвольных постоянных.

а) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_{оо} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

б) Частное решение исходного уравнения будем искать в виде:

$$y_{чн} = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}.$$

Вычислим определитель Вронского фундаментальной системы решений $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$. Имеем:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}.$$

По формулам (51) получаем: $C_1'(x) = \dfrac{-e^{2x}}{\left(2 + e^{-x}\right)e^{3x}} = -\dfrac{1}{2e^x + 1}$, $C_2' = \dfrac{e^x}{\left(2 + e^{-x}\right)e^{3x}}$.

Отсюда получаем:

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{2e^x + 1} = \left| \begin{matrix} 2e^x + 1 = t & \\ 2e^x dx = dt & dx = \dfrac{dt}{t-1} \end{matrix} \right| = -\int \frac{dt}{t(t-1)} = -\int \frac{1 - t + t}{t(t-1)} dt =$$

$$= -\int \frac{1 - t + t}{t(t-1)} dt = -\int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}\right) dt = \ln|t| - \ln|t-1| = \ln\left|\frac{t}{t-1}\right| = \ln\left|\frac{2e^x + 1}{2e^x}\right|,$$

$$C_2=\int\frac{e^x}{(2e^x+1)e^{2x}}dx=\left|\begin{matrix}e^x=t\\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{(2t+1)t^2}=\int\left(\frac{4}{2t+1}-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=$$

$$=2\ln|2t+1|-2\ln|t|-t^{-1}=2\ln\left|2e^x+1\right|-2x-e^{-x}.$$

Произвольные постоянные при интегрировании мы не пишем, так как надо найти лишь одну функцию $C_1(x)$ и одну $C_2(x)$. Таким образом получаем:

$$y_{чн}=e^x\ln\left|\frac{2e^x+1}{2e^x}\right|+e^{2x}\left(2\ln\left|2e^x+1\right|-2x-e^{-x}\right)$$

в) $y_{он}=C_1(x)e^x+C_2(x)e^{2x}+e^x\ln\left|\frac{2e^x+1}{2e^x}\right|+e^{2x}\left(2\ln\left|2e^x+1\right|-2x-e^{-x}\right).$

2) Решить дифференциальное уравнение: $y''-25y=6e^{2x}$.

а) $\lambda^2-25=0\Rightarrow\ \lambda_{1,2}=\pm5\ \Rightarrow\ y_{оо}=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}$.

б) Для нахождения $y_{чн}$ применим метод вариации произвольных постоянных. $y_{чн}=C_1(x)e^{5x}+C_2(x)e^{-5x}$.

Вычислим вронскиан:

$$W(x)=\begin{vmatrix}e^{5x} & e^{-5x}\\ 5e^{5x} & -5e^{-5x}\end{vmatrix}=-5-5=-10.$$

Теперь применим формулу (51):

$$C_1'(x)=\frac{-e^{-5x}6e^{2x}}{-10}=\frac{3}{5}e^{-2x},\ C_2'(x)=\frac{e^{5x}6e^{2x}}{-10}=-\frac{3}{5}e^{7x}.$$

Следовательно: $C_1(x)=\frac{3}{5}\int e^{-2x}dx=-\frac{3}{10}e^{-2x}$, $C_2(x)=-\frac{3}{5}\int e^{7x}dx=-\frac{3}{35}e^{7x}$.

Таким образом:

$$y_{чн}=-\frac{3}{10}e^{-2x}e^{5x}-\frac{3}{35}e^{7x}e^{-5x}=-\frac{3}{10}e^{3x}-\frac{3}{35}e^{2x}.$$

в) $y_{он}=C_1e^{5x}+C_2e^{-5x}-\frac{3}{10}e^{3x}-\frac{3}{35}e^{2x}$.