МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования

Донской государственный технический университет

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел 1: вычисление производных и пределов

Курс лекций
и
образец решения индивидуального задания

Ростов-на-Дону
2021

УДК 517(07)
Теория пределов и дифференциальное исчисление. Раздел 1: вычисление производных и пределов. (Курс лекций и образец решения индивидуального задания). — Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2021, 26 с.

Изложен курс лекций по теории пределов и дифференциальному исчислению.

Методические указания предназначены для студентов, проходящих обучение на кафедре высшей математики ДГТУ.

Составитель: зав. кафедрой высшей математики, д.ф.-м.н., профессор Павлов И.В.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент А.М. Можаев, к.ф.-м.н., доцент Г.А. Власков

Общее редактирование и компьютерный набор И.В. Павлова

ВВОДНАЯ ЛЕКЦИЯ: ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Лекция 1

В данном разделе мы напомним известные из средней школы факты, связанные с вычислением производной. Все эти утверждения будут доказаны нами после изучения теории пределов. Начнем с формального определения производной.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на открытом интервале $J=(a,b)$ действительной прямой *R*, точка $x\in J$ и число Δx (называемое приращением независимой переменной *x*) таково, что $x+\Delta x\in J$. При этом выражение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называют приращением данной функции в точке $x\in J$.

Определение 1. Производной $y'=f'(x)$ функции $y=f(x)$ в точке $x\in J$ называется предел отношения приращения функции в точке $x\in J$ к приращению независимой переменной, когда приращение Δx независимой переменной стремится к нулю, то есть

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой на интервале $J=(a,b)$, если она имеет производную в каждой точке этого интервала. Процесс вычисления производной называется дифференцированием.

□

Для того, чтобы освоить технику вычисления производной, необходимо знать правила дифференцирования, таблицу производных элементарных функций, а также уметь четко определять порядок действий в математическом выражении.

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной функции равна нулю, то есть если $y=c=const$, то
$$y'=c'=0.$$
2. Производная суммы двух функций равна сумме производных этих функций, то есть если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют, то
$$\left[f(x)+g(x)\right]'=f'(x)+g'(x).$$
3. Постоянный множитель можно вынести за знак производной, то есть если $c=const$, а $f'(x)$ существует, то
$$\left[c\cdot f(x)\right]'=c\cdot f'(x).$$
4. Производная произведения двух функций равна производной первой функции, умноженной на вторую, плюс первая функция, умноженная на производную второй; то есть если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют, то
$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$
5. Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя исходной дроби, а в числителе которой стоит производная числителя исходной дроби, умноженная на ее знаменатель, минус числитель исходной дроби, умноженный на производную ее знаменателя; то есть если $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют и $g(x)\neq 0$, то
$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

6. Производная сложной функции (цепное правило): если $y=g(u)$, где в свою очередь $u=f(x)$, и если $f'(x)$ и $g'(u)$ существуют, то
$$\left[g\big(f(x)\big)\right]'=g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x).$$

Таблица производных элементарных функций

Производные степенной, показательной и логарифмической функций	Производные тригонометрических функций	Производные обратных тригонометрических функций
$\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$ (где $\alpha=const$)	$(\sin x)'=\cos x$	$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(a^{x}\right)'=a^{x}\cdot\ln a$ (где $a=const,\, a>0$)	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\cdot\ln a}$ (где $a=const,\, a>0,\ a\neq1$)	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$\left(e^{x}\right)'=e^{x}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ (частные случаи предыдущих двух формул при $a=e=2{,}718\ldots$, где e – натуральное число)	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Порядок действий в математическом выражении
и дифференцирование сложных функций

Рассмотрим две функции: $y_1=\sin x^3$ и $y_2=\sin^3 x$. Эти функции очень похожи. Для правильного их дифференцирования нужно отчетливо выделить операции, которые производятся над переменной *x* в данных математических выражениях. У первой функции переменная *x* сначала возводится в куб, а затем на полученный результат действует функция синус. Таким образом, $y_1=\sin\left(x^3\right)$. Наоборот, у второй функции переменная *x* сначала подвергается действию функции синус, а затем результат возводится в куб, то есть $y_2=(\sin x)^3$. Найдем производные этих функций, применяя цепное правило и таблицу производных. Заметим, что начинать дифференцирование нужно с последней операции, затем дифференцируют предпоследнюю операцию и, действуя таким образом, заканчивают производной первой операции.

Последней операцией функции $y_1=\sin\left(x^3\right)$ является операция синус, производная которой есть косинус, поэтому первым звеном цепного правила является функция $\cos\left(x^3\right)$. При этом у полученной нами функции сохранился аргумент, которым обладал синус. Предпоследней операцией у рассматриваемой функции является возведение в куб (эта операция в данном примере одновременно является первой). Поэтому второе (и заключительное) звено цепного правила будет производная степенной функции x^3, то есть функция $3x^2$. Руководствуясь формулой 6 правил дифференцирования, окончательно получаем : $\left(y_1\right)'=\cos\left(x^3\right)\cdot 3x^2$.

Последней операцией функции $y_2=(\sin x)^3$ является возведение в куб, поэтому у ее производной первым звеном будет функция $3(\sin x)^2$. Отметим, что так как у исходной функции аргументом, который возводился в куб, был $\sin x$, то этот аргумент сохранился и в первом звене дифференцирования. Предпоследней (и одновременно первой) операцией рассматриваемой функции является синус, поэтому второе звено будет равно $\cos x$. Окончательно получаем: $(y_2)' = 3(\sin x)^2 \cdot \cos x = 3\sin^2 x \cdot \cos x$.

Продифференцируем теперь сложную функцию, состоящую из трех операций, а именно функцию $y = tg^2 x^5$. Вычленим составляющие эту функцию простые операции: $y = \left(tg(x^5)\right)^2$. Здесь первая операция – возведение переменной x в пятую степень, вторая операция – взятие тангенса от полученного результата и, наконец, последняя операция – возведение всего, что получилось, в квадрат. При дифференцировании цепное правило даст три звена. Первое звено получим, дифференцируя последнюю операцию. Оно будет состоять из функции $2\left(tg(x^5)\right)$. Второе звено – производная предпоследней операции – равно $\dfrac{1}{\cos^2(x^5)}$. И, наконец, последнее звено есть функция $5x^4$. В результате имеем: $y' = 2tg(x^5) \cdot \dfrac{1}{\cos^2(x^5)} \cdot 5x^4$.

Вычислим производную еще более сложной функции $y = \ln^7 arctg\left(5x^4 - 6x^3\right)$. Здесь первой операцией целесообразно считать многочлен $5x^4 - 6x^3$. Вторая операция – это взятие арктангенса от многочлена, третья операция – вычисление натурального логарифма, четвертая операция – возведение всего полученного в седьмую степень. Применяя цепное правило, получаем: $y' = 7\ln^6 arctg\left(5x^4 - 6x^3\right) \cdot \dfrac{1}{arctg\left(5x^4 - 6x^3\right)} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(5x^4 - 6x^3\right)^2} \cdot \left(20x^3 - 18x^2\right)$.

Некоторые замечания, полезные при дифференцировании

1. Если нужно продифференцировать функцию, содержащую радикалы, то перед дифференцированием эти радикалы следует перевести в дробные степени. Например, пусть $y = \sqrt[5]{9x^5 + 4x^3 - 17} + x\sqrt[3]{x^2}$. Сначала преобразовываем эту функцию к виду: $y = \left(9x^5 + 4x^3 - 17\right)^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{5}{3}}$. Теперь производная вычисляется без труда: $y' = \dfrac{1}{5}\left(9x^5 + 4x^3 - 17\right)^{-\frac{4}{5}} \cdot \left(45x^4 + 12x^2\right) + \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$.
2. Если нужно продифференцировать дробь, числитель которой – постоянное число, то перед дифференцированием знаменатель с показателем минус единица нужно поместить в числитель. Пусть, например, $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^8} + \dfrac{7}{\sqrt{x^2+3}}$. Преобразовываем функцию следующим образом: $y = x^{-1} - 2x^{-8} + 7\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$. Теперь $y' = -x^{-2} + 16x^{-9} - \dfrac{7}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x =$
$= -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{16}{x^9} - \dfrac{7x}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}$.
3. При дифференцировании не следует путать производные степенной и показательной функций. Для примера рассмотрим функции $y_1 = \arcsin^2 x$ и $y_2 = 2^{\arcsin x}$. У функции $y_1 = (\arcsin x)^2$ первая операция есть функция арксинус, а вторая операция – степенная функция (возведение в степень с постоянным показателем 2). Поэтому, следуя правилу дифференцирования сложной функции, получим $y_1' = 2\arcsin x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. У второй функции первая операция также есть функция арксинус, но вторая операция – это взятие

постоянного числа 2 с показателем $\arcsin x$, то есть показательная функция. Поэтому $y_2^{/}=2^{\arcsin x}\cdot\ln 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Если нужно продифференцировать логарифмическую функцию, внутри которой содержится степень, то, применяя свойства логарифма, показатель степени следует вынести за знак логарифма. Пусть, например, $y=\log_3\sqrt[4]{ctg8x}$. Заменив радикал дробной степенью и вынеся показатель за знак логарифма, получим: $y=\log_3\left(ctg8x\right)^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}\log_3 ctg8x$. Поэтому $y^{/}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{ctg8x\cdot\ln 3}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 8x}\right)\cdot 8=-\dfrac{2}{\sin 8x\cdot\cos 8x\cdot\ln 3}=-\dfrac{4}{\sin(16x)\cdot\ln 3}$.
5. Если внутрь какой-либо функции вставлено произведение или частное двух функций, то в этом случае не следует пытаться одним махом вычислить производную данной сложной функции, а лучше действовать поэтапно. Например, если $y=\arccos\left(\dfrac{e^{x^2}}{\ln 4x}\right)$, то ее производную следует вычислять следующим образом: $y^{/}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{e^{x^2}}{\ln 4x}\right)^2}}\cdot\left(\dfrac{e^{x^2}}{\ln 4x}\right)^{/}=$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{e^{x^2}}{\ln 4x}\right)^2}}\cdot\frac{\left(e^{x^2}\right)^{/}\ln 4x-e^{x^2}(\ln 4x)^{/}}{\ln^2 4x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{e^{x^2}}{\ln 4x}\right)^2}}\cdot\frac{e^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 4x-e^{x^2}\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 4x}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим метод нахождения производной степенно-показательной функции $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$, у которой переменная x находится как в основании степени, так и в показателе. Прологарифмируем данную функцию: $\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}=g(x)\cdot\ln f(x)$. Теперь продифференцируем обе части полученного равенства: $\dfrac{1}{y}\cdot y^{/}=g^{/}(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f^{/}(x)}{f(x)}$. Отсюда $y^{/}=y\cdot\left(g^{/}(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f^{/}(x)}{f(x)}\right)=\left(f(x)\right)^{g(x)}\cdot\left(g^{/}(x)\cdot\ln f(x)+g(x)\cdot\dfrac{f^{/}(x)}{f(x)}\right)$.

__Пример 1.__ Найдем производную функции $y=x^{\arccos x^6}$. Применим метод логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем данную функцию: $\ln y=\ln\left(x^{\arccos x^6}\right)=\arccos x^6\cdot\ln x$. Теперь найдем производные обеих частей полученного равенства: $\dfrac{1}{y}\cdot y^{/}=\left(\arccos x^6\right)^{/}\cdot\ln x+\arccos x^6\cdot(\ln x)^{/}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(x^6)^2}}\cdot 6x^5\cdot\ln x+\arccos x^6\cdot\dfrac{1}{x}$. В результате получаем: $y^{/}=y\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{12}}}\cdot 6x^5\cdot\ln x+\arccos x^6\cdot\dfrac{1}{x}\right)=x^{\arccos x^6}\left(-\dfrac{6x^5\cdot\ln x}{\sqrt{1-x^{12}}}+\dfrac{\arccos x^6}{x}\right)$.

□

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 2

Определение предела последовательности

Обозначим через $\mathbf{N}$ множество натуральных чисел. Итак, $\mathbf{N}=\{1,2,...,n,...\}$.

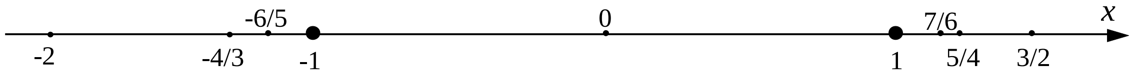
<u>*Определение 2.*</u> Последовательностью действительных чисел $\{a_n\}$ называется закон, согласно которому каждому $n\in\mathbf{N}$ ставится в соответствие действительное число a_n, называемое элементом последовательности. Элемент a_n называется общим членом последовательности.

Последовательность чаще всего задается своим общим членом a_n. Более подробно последовательность $\{a_n\}$ выписывают так: $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

<u>*Пример 2.*</u> 1) Расположим элементы последовательности с общим членом $a_n=\dfrac{1}{2^n}$ на действительной прямой:

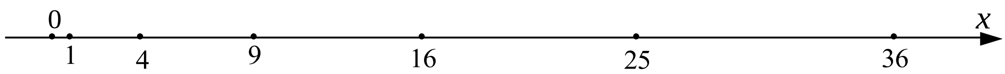
Мы видим, что элементы этой последовательности с ростом *n* приближаются к точке 0 на сколь угодно малое расстояние. Говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ "сгущается" около точки 0, или "стремится" к точке 0. Мы увидим, что в соответствие с точным определением, которое будет дано чуть позже, число 0 является пределом последовательности $\{a_n\}$.

2) Рассмотрим теперь следующую последовательность: $a_n=(-1)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Имеем: $a_1=-2,\ a_2=\dfrac{3}{2},\ a_3=-\dfrac{4}{3},\ a_4=\dfrac{5}{4},\ a_5=-\dfrac{6}{5},\ a_6=\dfrac{7}{6},...$. Нанесем эти элементы на числовую прямую:



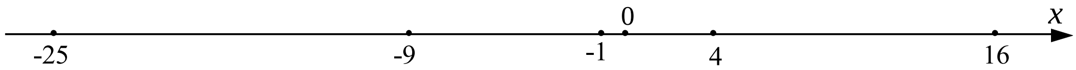
Нечетные элементы этой последовательности сгущаются вокруг точки –1, а четные – вокруг точки 1. То есть не существует <u>одной</u> такой точки, вокруг которой сгущались бы все члены данной последовательности с ростом *n*. О такого сорта последовательностях говорят, что они не имеют предела (расходятся).

3) Члены последовательности $a_n=n^2$ с ростом *n* уходят все дальше и дальше вправо на числовой прямой:



О такой последовательности мы будем говорить, что ее предел равен $+\infty$, или что она расходится к $+\infty$. Аналогично, о последовательности $a_n=-n^2$, члены которой с ростом *n* уходят все дальше и дальше влево на числовой прямой, говорят, что ее предел равен $-\infty$, или что она расходится к $-\infty$.

4) Члены последовательности $a_n=(-1)^n\cdot n^2$, перескакивая с одной стороны оси Ox на другую, с ростом n также удаляются на все большее и большее расстояние от начала координат:



Так как элементы a_n не сохраняют определенный знак, то в этом случае будем говорить, что предел данной последовательности равен ∞ (то есть перед символом ∞ не будем ставить никакой знак).

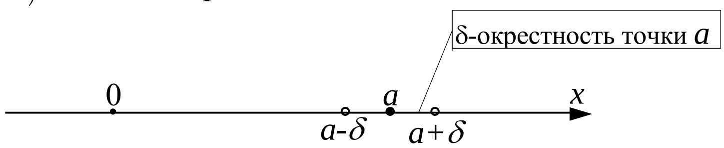
□

Перед тем, как перейти к строгим определениям, напомним обозначения двух логических символов, с помощью которых сокращают некоторые записи. А именно, вместо фраз "для любого", "для всякого", "для каждого" часто записывают символ $\forall$; вместо слов "существует", "существуют" записывают символ $\exists$. Кроме того, греческими буквами δ и ε мы будем всегда обозначать положительные переменные, могущие принимать сколь угодно малые значения.

<u>*Определение 3.*</u> δ - окрестностью точки $a\in R$ называется множество точек $x\in R$, удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\delta$ (которое, как известно, равносильно двойному неравенству $a-\delta<x<a+\delta$).

□

Геометрически δ - окрестность точки $a\in R$ представляет собой открытый интервал $(a-\delta, a+\delta)$ числовой прямой:



<u>*Определение 4.*</u> 1) Число $a\in R$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если $\forall\delta>0\,\exists N>0$ (N – натуральное число), такое, что $\forall n>N$ число a_n попадает в δ - окрестность точки a, то есть выполняется неравенство:

$$a-\delta<a_n<a+\delta. \qquad (2)$$

Тот факт, что a есть предел $\{a_n\}$ обозначается следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

2) В случае, если не существует числа $a\in R$, удовлетворяющего пункту 1) данного определения, говорят что последовательность $\{a_n\}$ расходится (не имеет конечного предела).

3) Если $\forall M>0$ (M – сколь угодно большое число) $\exists N>0$, такое, что $\forall n>N$ $a_n>M$ (соответственно, $a_n<-M$), то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ расходится к $+\infty$ (соответственно, расходится к $-\infty$), и этот факт обозначают следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ (соответственно, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$).

4) Если $\forall M>0$ (M – сколь угодно большое число) $\exists N>0$, такое, что $\forall n>N$ $|a_n|>M$, то говорят, что последовательность $\{a_n\}$ расходится к ∞, и этот факт обозначают следующим образом: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

□

Читателю предлагается доказать, что последовательности, взятые из пунктов 1)–4) примера 2, соответственно удовлетворяют пунктам 1)–4) определения 4, то есть, что $\lim\limits_{n\to\infty}2^{-n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\cdot(1+1/n)$ не существует, $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2=\infty$.

Свойства предела последовательности

1. Предел константы равен самой этой константе, то есть если $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n = a = const$, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

2. Предел суммы двух последовательностей равен сумме пределов этих последовательностей, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, то есть если $c = const$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n.$$

4. Предел произведения двух последовательностей равен произведению пределов этих последовательностей, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

5. Предел частного двух последовательностей равен частному пределов этих последовательностей, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

6. Если члены одной последовательности не превышают соответствующих членов другой последовательности, то и предел первой последовательности не превышает предела второй последовательности, то есть если $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n \le b_n$ и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют, то

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Заметим, что если выполняется строгое неравенство $a_n < b_n$, то после перехода к пределу может получится равенство. Например, если $a_n = \dfrac{1}{n}$, а $b_n = \dfrac{2}{n}$, то $a_n < b_n$, однако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Таким образом, в общем случае следствием неравенства $a_n < b_n$ является нестрогое неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

7. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ и $\forall n \in \mathbf{N}$ $a_n \le c_n \le b_n$, то предел последовательности $\{c_n\}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a.$$

8. Если последовательность $\{c_n\}$ ограничена (то есть $\exists M: 0 < M < +\infty$, такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ $|c_n| \le M$), а $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}(c_n a_n) = 0.$$

Доказательства свойств 1–6 мы опускаем. Их можно найти в любом учебнике по математическому анализу. Докажем лишь свойства 7 и 8.

Доказательство свойства 7. Пользуясь определением 4, распишем тот факт, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$: $\forall \delta > 0\ \exists N_1 > 0: \forall n > N_1\ a - \delta < a_n < a + \delta$. Точно то же сделаем для $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$: $\forall \delta > 0\ \exists N_2 > 0: \forall n > N_2\ a - \delta < b_n < a + \delta$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ два полученные двойные неравенства выполняются одновременно и, следовательно, имеем:

$a-\delta<a_n\le c_n\le b_n<a+\delta \Rightarrow a-\delta<c_n<a+\delta \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n=a$. □

Доказательство свойства 8. Прежде всего отметим, что равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ равносильно равенству $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. Имеем: $0\le|c_n|\le M \Rightarrow 0\le|c_n|\cdot|a_n|\le M\cdot|a_n|$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(M\cdot|a_n|\right)=M\cdot\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, то по свойству 7 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|\cdot|a_n|=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(c_n a_n)=0$.

□

Монотонные последовательности

Определение 5. Последовательность $\{a_n\}$ называется монотонно возрастающей (соответственно, монотонно убывающей), если $\forall n\in\mathbf{N}$ $a_n\le a_{n+1}$ (соответственно, $a_n\ge a_{n+1}$). Если $\forall n\in\mathbf{N}$ выполняются соответствующие строгие неравенства, то говорят о строгом возрастании и строгом убывании последовательности.

□

Например, в примере 2 последовательность 1) строго монотонно убывает, последовательность $a_n=n^2$ из пункта 3) строго монотонно возрастает, а последовательность 2) не является монотонной. Для монотонных последовательностей справедлива следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки нашей программы.

Теорема 1. 1) Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху (то есть $\exists M<+\infty$, такое, что $\forall n\in\mathbf{N}$ $a_n\le M)$, то данная последовательность имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\le M$.

2) Если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу (то есть $\exists M>-\infty$, такое, что $\forall n\in\mathbf{N}$ $a_n\ge M)$, то данная последовательность имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\ge M$. □

Пример 3. Рассмотрим последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Используя формулу бинома Ньютона и формулу суммы геометрической прогрессии, можно доказать (доказательство не слишком простое), что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху числом *M*=3. По теореме 1 данная последовательность имеет предел, который, следуя Л.Эйлеру, обозначают буквой *e*. Приближенное значение числа *e* таково: $e\approx 2{,}718281$.

Определение 6. Число

$$\boxed{e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}. \qquad (3)$$

называется числом Эйлера. □

При изучении понятия предела функции нам понадобится следующее

Определение 7. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ строго стремится к числу $a\in R$, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ и $\forall n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство $a_n\ne a$. □

Например, последовательность $a_n=\frac{1}{2^n}$ из пункта 1) примера 2 стремится к нулю строго. Предел же последовательности $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$, как это следует из свойства 8 пределов последовательностей, равен нулю. Однако $a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}$ не стремится к нулю строго, так как при нечетных n $a_n=0$.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ
Лекция 3

Определение предела функции

Рассмотрим теперь действительную функцию $y = f(x)$ действительной переменной x с областью определения $\mathbb{D}(y)$, и пусть b – либо действительное число, либо бесконечно удаленная точка (то есть $+\infty$, $-\infty$ или просто ∞).

<u>*Определение 8.*</u> 1) Предположим, что существует хотя бы одна последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{D}(y)$, строго стремящаяся к a. Точка b называется пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{D}(y)$, строго стремящейся к a, выполняется соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Тот факт, что b является пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a, обозначают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

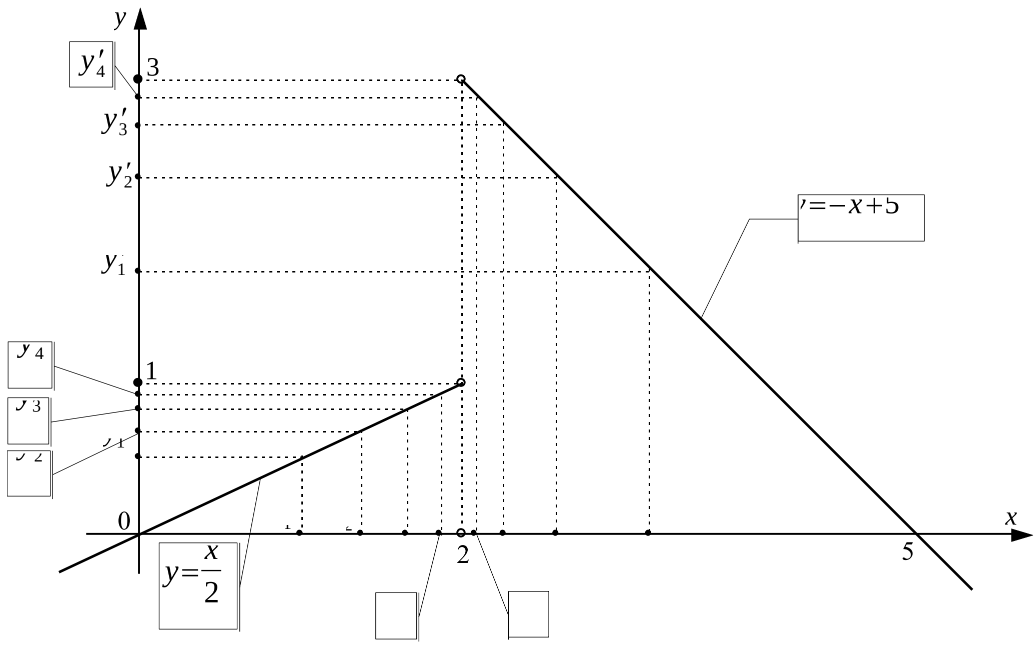
2) Предположим, что существует хотя бы одна последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{D}(y)$, строго монотонно возрастающая (соответственно, строго монотонно убывающая) к a. Точка b называется левым (соответственно правым) пределом функции $y = f(x)$ при x стремящемся к a, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{D}(y)$, строго монотонно возрастающей (соответственно, строго монотонно убывающей) к a, выполняется соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Обозначение левого предела: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ (соответственно, правого предела: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$). $\square$

Отметим, что из определения 8 сразу вытекает, что если предел (левый предел, правый предел) функции существует, то этот предел единственен.

<u>*Пример 4.*</u> Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & x < 2 \\ -x+5, & x > 2 \end{cases}.$$

Ее график имеет вид:



Заметим, что данная функция не определена в точке $x = a = 2$. Однако этот факт не влияет на вычисление предела (левого предела, правого предела) функции при стремлении x к этой точке, так как последовательность $\{x_n\}$, фигурирующая в определении 8, не посещает предельную точку $a=2$.

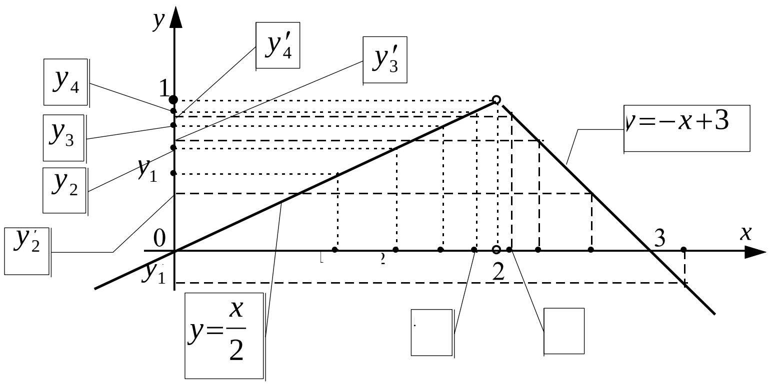
Рассмотрим сначала последовательность $\{x_n\}$, строго монотонно возрастающую к $a=2$, и обозначим $y_n=f(x_n)$. Так как $\forall n\in\mathbf{N}$ $x_n<2$, то, используя вид нашей функции, получаем: $y_n=\dfrac{x_n}{2}$. Из рисунка видно, что при $n\to\infty$ последовательность $y_n\to 1$. Это также можно вычислить аналитически, используя свойства предела последовательности (которые верны также для левых и правых пределов): $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}\cdot 2=1$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=1$.

Рассмотрим теперь последовательность $\{x'_n\}$, строго монотонно убывающую к $a=2$, и обозначим $y'_n=f(x'_n)$. Так как $\forall n\in\mathbf{N}$ $x'_n>2$, то, используя вид нашей функции, получаем: $y'_n=-x'_n+5$. Опять из рисунка видно, что при $n\to\infty$ последовательность $y'_n\to 3$. Это же можно вычислить аналитически: $\lim\limits_{n\to\infty}y'_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-x'_n+5)=-\lim\limits_{n\to\infty}x'_n+5=-2+5=3$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=3$.

Ясно, что $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ не существует. Действительно, рассмотрим последовательность $x_1,x'_1,x_2,x'_2,\ldots,x_n,x'_n,\ldots$, которая, очевидно, строго стремится к точке $a=2$. Однако для последовательности соответствующих значений функции $y=f(x)$, то есть для последовательности $y_1,y'_1,y_2,y'_2,\ldots y_n,y'_n,\ldots$, получаем приблизительно такую же ситуацию, какую мы имели в пункте 2) примера 2. Поэтому эта последовательность расходится и, согласно пункту 1) определения 8, получаем, что $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ не существует. Читателю предлагается скрупулезно произвести все необходимые рассуждения.

□

<u>*Пример 5.*</u> Переместим параллельно самой себе правую ветвь графика из примера 4 на 2 единицы вниз. Получим следующий график:



Это график функции:

$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x<2\\ -x+3, & x>2\end{cases}.$$

Рассуждая так же, как в примере 4, легко получить, что $\lim\limits_{x\to 2-0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 2+0}f(x)=1$, и предел функции при $x\to 2$ существует и равен 1, то есть $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=1$.

□

Примеры 4 и 5 побуждают нас сформулировать следующую теорему, доказательство которой мы опускаем.

<u>*Теорема 2.*</u> Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

□

Читателю предлагается подумать, как можно сформулировать обратную теорему.

<u>*Пример 6.*</u> Рассмотрим функцию $y=\ln x:=\log_e x$, где e – натуральное число (см. определение 6). Из школьного курса математики известно, что $\mathbb{D}(y)=(0,+\infty)$. Рассмотрим точку $a=-5$. Очевидно, что не существует последовательности $\{x_n\}\subset\mathbb{D}(y)$, стремящейся к $a=-5$. Поэтому бессмысленно говорить о пределе функции $y=\ln x$ при $x\to-5$ (именно поэтому в определении 8 требуется существование хотя бы одной последовательности $\{x_n\}\subset\mathbb{D}(y)$, строго стремящейся к предельной точке a).

Пусть теперь $a=0$. Ясно, что не существует последовательности $\{x_n\}\subset\mathbb{D}(y)$, строго монотонно возрастающей к $a=0$ (то есть о левом пределе говорить бессмысленно). Однако существуют последовательности $\{x_n\}\subset\mathbb{D}(y)$, строго монотонно убывающие к $a=0$ (например, можно взять $x_n=\dfrac{1}{2^n}$). Легко видеть (постройте график!), что для таких последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$. Вместе с этим и $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$.

□

Свойства предела функции

Во всех нижеперечисленных свойствах, если речь идет о двух функциях $y=f(x)$ и $y=g(x)$, то предполагается, что существует последовательность $\{x_n\}\subset\mathbb{D}(f)\cap\mathbb{D}(g)$, строго стремящаяся к a.

1. Предел константы равен самой этой константе, то есть если $f(x)=c=const$ то

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c.$$

2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, то есть если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x).$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак предела, то есть если $c=const$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и конечен, то

$$\lim_{x\to a}\left[c\cdot f(x)\right]=c\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций, то есть если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют и конечны, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x).$$

5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, то есть если $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, конечны и $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}.$$

6. Если в некоторой окрестности точки a (исключая, быть может, саму точку a) $f(x)\le g(x)$ и пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют, то

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

7. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ и если в некоторой окрестности точки a (исключая, быть может, саму точку a) $f(x)\le h(x)\le g(x)$ то предел функции $h(x)$ существует и

$$\lim_{x\to a} h(x) = b.$$

8. Если в некоторой окрестности точки a (исключая, быть может, саму точку a) функция $y=f(x)$ ограничена (то есть $\exists M: 0<M<+\infty$, такое, что в этой окрестности $|f(x)|\le M$), а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0.$$

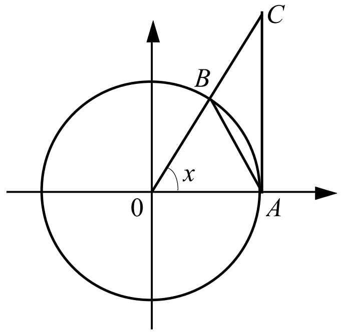
Доказательства всех этих свойств немедленно следуют из определения 8 и соответствующих свойств предела последовательности.

□

Замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел).

Доказательство. Прежде всего покажем, что при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство:



$$\sin x < x < tgx \qquad (4)$$

Обозначим площадь сектора AOB построенного единичного круга через S. Тогда $S_{\Delta AOB}<S<S_{\Delta AOC}$. Имеем: $S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot OB\cdot\sin x=\dfrac{\sin x}{2}$, $S=\dfrac{\pi\cdot OA^2}{2\pi}\cdot x=\dfrac{x}{2}$, $S_{\Delta AOC}=\dfrac{1}{2}\cdot OA\cdot AC=\dfrac{tgx}{2}$.

Отсюда получаем выполнение (4). Поделив неравенство (4) на $\sin x$, получим: $1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}\Leftrightarrow 1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x\Leftrightarrow -1<-\dfrac{\sin x}{x}<-\cos x\Leftrightarrow 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<1-\cos x\Leftrightarrow\ 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

Применяя в последнем неравенстве левую часть неравенства (4), получаем неравенство: $0<1-\dfrac{\sin x}{x}<2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2\Leftrightarrow 0<1-\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{x^2}{2}$. В силу четности функций $\dfrac{\sin x}{x}$ и x^2 последнее двойное неравенство справедливо не только при $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, но и при $-\dfrac{\pi}{2}<x<0$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$, то по свойству 7 предела функции имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$, откуда немедленно следует равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. □

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (второй замечательный предел).

Доказательство опускается (см. пример 3 и определение 6). □

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 4

Непрерывные функции

<u>*Определение 9.*</u> Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $a\in\mathbb{D}(y)$, если

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a). \tag{5}$$

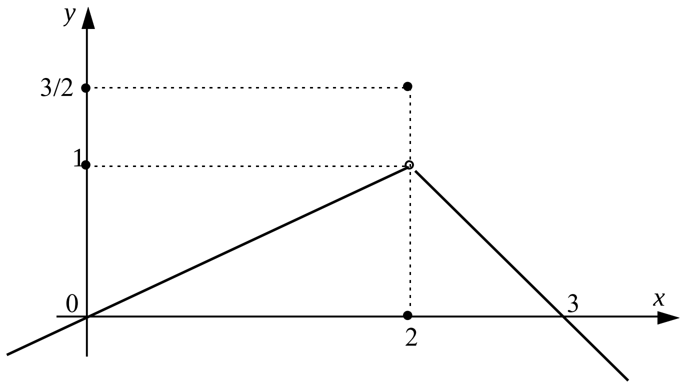
Если равенство (5) не выполняется, то функция $y=f(x)$ называется разрывной в точке a.

В примерах 4 и 5 рассматриваемые функции не были определены в точке $x=a=2$, поэтому не имеет смысла говорить о непрерывности этих функций в данной точке.

<u>*Пример 7.*</u> Рассмотрим функцию из примера 5, но "доопределенную" в точке $x=a=2$:

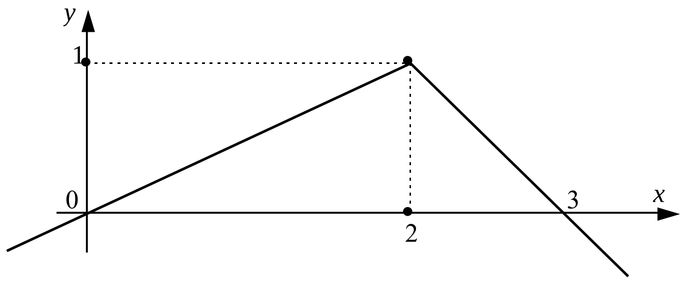
$$y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2},\ x<2\\ 3/2,\ x=2\\ -x+3,\ x>2\end{cases}. \tag{6}$$

График этой функции имеет вид:



Согласно определению 8, вычисляя предел функции при $x\to a$ мы не используем значение функции в точке a. Поэтому предел, вычисленный нами в примере 5, сохраняет свое значение, то есть и в данном случае $\lim_{x\to 2} f(x)=1$. Значение же функции в точке $x=a=2$, согласно формуле (6), равно $f(2)=3/2$. Равенство (5) не выполняется, поэтому данная функция разрывна в точке $x=a=2$. Геометрически это выглядит как разрыв графика в исследуемой точке.

<u>*Пример 8.*</u> Изменим значение функции из примера 7 только в одной точке, положив $f(2)=1$. График полученной функции имеет вид:



Переопределением функции в точке $x=a=2$ мы ликвидировали разрыв графика в этой точке. Теперь получаем: $\lim_{x\to 2} f(x)=1=f(2)$. Равенство (5) имеет место, то есть данная функция непрерывна в точке $x=a=2$.

<u>*Определение 10.*</u> Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на множестве $J\subset\mathbb{D}(y)$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Легко видеть, что в примерах 4–7 исследуемые функции непрерывны всюду на числовой прямой за исключением точки $x=a=2$, а в примере 8 функция непрерывна во всех точках прямой.

Следующая лемма будет полезна при доказательстве свойств непрерывных функций.

Лемма 1. 1) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, функция $u=f(x)$ строго монотонно возрастает (или строго монотонно убывает) в тех точках окрестности a, в которых она определена, а функция $y=g(u)$ имеет предел при $u\to b$.Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=\lim\limits_{u\to b} g(u)$.

2) Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, а функция $y=g(u)$ непрерывна в точке $u=b$, то $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g(b)$.

Доказательство этой леммы почти очевидно и предоставляется читателю.

□

Свойства непрерывных функций

1. Постоянная функция непрерывна.
2. Сумма двух непрерывных функций непрерывна.
3. Произведение непрерывной функции на число есть непрерывная функция.
4. Произведение двух непрерывных функций непрерывно.
5. Частное двух непрерывных функций непрерывно в точках, в которых знаменатель неравен нулю.
6. Сложная функция, состоящая из двух непрерывных функций, непрерывна (определение сложной функции содержится в вводной лекции в шестом правиле дифференцирования).

Доказательство. Доказательство свойств 1–5 непосредственно следуют из соответствующих свойств предела функции. Докажем свойство 6.

Пусть функция $u=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ (то есть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$), а функция $y=g(u)$ непрерывна в точке $u=f(a)$. По пункту 2) леммы 1 имеем: $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=g(f(a))$, то есть функция $y=g(f(x))$ непрерывна в точке $x=a$.

□

Теорема 3. Основные элементарные функции (то есть функции, представленные в таблице производных из вводной лекции) непрерывны на своих областях определения.

Доказательство. Докажем теорему только для тригонометрических функций. Во-первых, используя первый замечательный предел, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0} x=1\cdot 0=0$$

Далее, по известной формуле: $\sin x-\sin a=2\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}$. Так как $\left|2\cos\frac{x+a}{2}\right|\le 2$, а по предыдущему замечанию и свойству 6 непрерывных функций $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{x-a}{2}=\sin\frac{a-a}{2}=0$, то по свойству 8 предела функции имеем: $\lim\limits_{x\to a}(\sin x-\sin a)=0$. Отсюда немедленно следует соотношение $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$, которое и доказывает непрерывность функции $y=\sin x$ при любом действительном a.

Для доказательства непрерывности функции $y=\cos x$ достаточно применить формулу приведения $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, непрерывность синуса и свойство 6 непрерывных функций.

Непрерывность функций $y=tgx$ и $y=ctgx$ (на своих областях определения) следует из непрерывности синуса и косинуса и свойства 5 непрерывных функций.

□

Теорема 4. Все элементарные функции (то есть те функции, которые образованы из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и взятия сложных функций) непрерывны на своих областях определения.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4 и свойств непрерывных функций.

□

Эквивалентные функции. Бесконечно малые функции (б.м.ф.)
и бесконечно большие функции (б.б.ф.).

В последующей части данной лекции мы предполагаем, что a – либо действительное число, либо одна из бесконечно удаленных точек: $+\infty, -\infty$ или просто ∞.

Определение 11. Функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ называются эквивалентными при $x\to a$, если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{7}$$

Обозначение эквивалентности функций таково: $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Аналогично определяются и обозначаются эквивалентные функции при $x\to a-0$ и $x\to a+0$.

□

Заметим, что в силу свойства 5 предела функции, равенство (7) равносильно равенству $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$.

Определение 12. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно малой функцией (б.м.ф.) при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой функцией (б.б.ф.) при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

□

Легко видеть, что бесконечно малая функция может быть эквивалентна только бесконечно малой функции, а бесконечно большая функция – только бесконечно большой.

Теорема 5. При $x\to 0$ справедлива следующая цепочка эквивалентных б.м.ф.:

$$x\sim \sin x\sim tgx\sim \arcsin x\sim arctgx\sim \ln(1+x)\sim e^x-1 \tag{8}$$

Доказательство. Первая эквивалентность – это просто первый замечательный предел. Вторая эквивалентность следует из первой и из непрерывности косинуса:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\cos 0}=1.$$

Докажем третью эквивалентность. Представим $\frac{\arcsin x}{x}=g(f(x))$, где $g(u)=\frac{u}{\sin u}$, а $u=f(x)=\arcsin x$ – строго монотонно возрастающая функция. Используя пункт 1) леммы 1, а также равенство $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x=0$, следующее из непрерывности функции арксинус, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}g(f(x))=\lim_{u\to 0}g(u)=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u}=1.$$

Четвертая эквивалентность доказывается так же, как третья. Докажем пятую эквивалентность. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1.$$

Здесь были применены свойство логарифмов, второй замечательный предел и пункт 2) леммы 1, который следует из непрерывности логарифма. Для доказательства последней эквивалентности применим представление: $\dfrac{e^x-1}{x}=g(f(x))$, где $g(u)=\dfrac{u}{\ln(1+u)}$, а $u=f(x)=e^x-1$ – строго монотонно возрастающая функция. Используя пункт 1) леммы 1, а также равенство $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$, следующее из непрерывности показательной функции, получаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}g(f(x))=\lim_{u\to 0}g(u)=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

□

Связь между б.м.ф. и б.б.ф. устанавливает следующая

Лемма 2. Если при $x\to a$ $f(x)$ – б.б.ф., то $\dfrac{1}{f(x)}$ – б.м.ф. Наоборот, если при $x\to a$ $f(x)$ – б.м.ф., то $\dfrac{1}{f(x)}$ – б.б.ф.

Доказательство предоставляется читателю. □

Теорема 6. При $x\to\infty$ справедлива следующая эквивалентность многочлена своей старшей степени:

$$a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0\sim a_n x^n, \tag{9}$$

где $a_n\neq 0$.

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{a_n x^n}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=$$

$$=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\ldots+\frac{a_1}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=1+0+\ldots+0+0=1.$$

Последние предельные соотношения следуют из леммы 2.

□

При вычислении пределов с помощью эквивалентных функций весьма полезна следующая простая

Теорема 7. Если при $x\to a$ $f_1(x)\sim g_1(x)$ и $f_2(x)\sim g_2(x)$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \tag{10}$$

в случае, когда один из этих пределов существует.

Доказательство. Имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\cdot\frac{f_1(x)/g_1(x)}{f_2(x)/g_2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to a}\left[f_1(x)/g_1(x)\right]}{\lim\limits_{x\to a}\left[f_2(x)/g_2(x)\right]}=\lim_{x\to a}\frac{g_1(x)}{g_2(x)}.$$

□

Заметим, однако, что если даже внутрь одной функции засунуть две эквивалентные функции, то полученные функции, вообще говоря, будут неэквивалентными. Например, по теореме 6 при $x\to\infty$ $x^3+x^2\sim x^3$. Подставив эти функции внутрь функции $y=e^u$, получим функции $e^{x^3+x^2}$ и e^{x^3}. Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^3+x^2}}{e^{x^3}}=\lim_{x\to\infty}e^{x^2}=+\infty.$$

То есть при $x\to\infty$ функции $e^{x^3+x^2}$ и e^{x^3} неэквивалентны.

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Лекция 5

Техника вычисления пределов

В данной лекции мы, в основном, будем иметь дело с пределами от элементарных функций. Используя теорему 4, легко вычислить предел такой функции, когда точка, к которой стремится аргумент, принадлежит области определения функции. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 9. Вычислить предел: $b=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3-5x^2+7x+1}{x^2-5x+6}$. Так как в точке $x=-1$ знаменатель функции, стоящей под знаком предела, неравен нулю, то эта функция непрерывна в точке $x=-1$. Следуя определению 9, для подсчета b достаточно вычислить эту функцию при $x=-1$, то есть $b=\dfrac{3(-1)^3-5(-1)^2+7\cdot(-1)+1}{(-1)^2-5\cdot(-1)+6}=\dfrac{-14}{12}=-\dfrac{7}{6}$. □

Наша основная задача – научится вычислять пределы, когда точка, к которой стремится аргумент, не принадлежит области определения функции, но "примыкает" к области определения.

Пример 10. Вычислить предел: $b=\lim\limits_{x\to 3}\left[\left(\sin\left(\dfrac{1}{x-3}\right)-2\cos\left(\dfrac{5}{x-3}\right)\right)\cdot\left(x^2-5x+6\right)\right]$.

Очевидно, точка $x=3$ не принадлежит области определения функции, стоящей под знаком предела, поэтому определение 9 неприменимо. Однако, первый сомножитель функции, стоящей под знаком предела, ограничен при $x\neq 3$, так как

$$\left|\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)-2\cos\left(\frac{5}{x-3}\right)\right|\le\left|\sin\left(\frac{1}{x-3}\right)\right|+2\left|\cos\left(\frac{5}{x-3}\right)\right|\le 1+2\cdot 1=3,$$

а второй сомножитель – б.м.ф. при $x\to 3$, так как $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-5x+6\right)=0$. По свойству 8 предела функции $b=0$. □

Следующая теорема аккумулирует предельные соотношения, хорошо известные из школьного курса математики.

Теорема 8. 1) Если $\alpha>0$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$; если же $\alpha<0$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}x^\alpha=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$.

2) Если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$; если же $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$. В частности, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

3) Если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$; если же $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$. В частности, $\lim\limits_{x\to 0+0}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}+0}tgx=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}tgx=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0+0}ctgx=+\infty,\ \lim\limits_{x\to\pi-0}ctgx=-\infty$.

5) $\lim\limits_{x\to-1+0}\arcsin x=-\dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to 1-0}\arcsin x=\dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to-1+0}\arccos x=\pi,\ \lim\limits_{x\to 1-0}\arccos x=0$.

6) $\lim\limits_{x\to-\infty}arctgx=-\dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to+\infty}arctgx=\dfrac{\pi}{2},\ \lim\limits_{x\to-\infty}arcctgx=\pi,\ \lim\limits_{x\to+\infty}arcctgx=0$. □

Читателю рекомендуется просмотреть все эти равенства на графиках функций.

Запишем некоторые соотношения, связанные с символом ∞. Принимая во внимание лемму 2, можно записать:

$$\frac{1}{\infty}=0,\ \frac{1}{0}=\infty. \tag{11}$$

Легко также обосновать следующие соотношения (здесь c – ненулевая константа):

$$c+\infty=\infty,\ c\cdot\infty=\infty,\ \infty\cdot\infty=\infty,\ \frac{\infty}{0}=\infty,\ \frac{0}{\infty}=0,\ \infty^{\infty}=\infty,\ 0^{\infty}=0. \tag{12}$$

Неопределенностями будем называть выражения вида:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^{\infty},\ \infty-\infty \tag{13}$$

и т.д. Соотношения типа (11) и (12), а также неопределенности типа (13) нетрудно записать и для символов $-\infty, +\infty$.

Пример 11. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+7x+1}{x^2-5x+6}$. Применив эквивалентность (9) и теорему 7, получаем: $b=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}3x=3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}x=3\cdot\infty=\infty$. Последнее равенство взято из (12).

□

Пример 12. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}\right)$. Переходя к пределу в каждом из радикалов, получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Разделив и умножив выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное выражение $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}$, имеем:

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+2\right)-\left(x^2+3\right)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+3}}=\frac{-1}{+\infty}=0.$$

□

Пример 13. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\cdot\arcsin x}-1}{\ln\left(1+tg7x^2\right)}$. Подставив $x=0$ отдельно в числитель и знаменатель, убеждаемся, что получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как при $x\to 0$ имеем $x\cdot\arcsin x\to 0$, то для числителя верна цепочка эквивалентностей при $x\to 0$:

$$e^{x\cdot\arcsin x}-1\sim x\cdot\arcsin x\sim x^2.$$

Аналогично, для знаменателя получаем:

$$\ln\left(1+tg7x^2\right)\sim tg7x^2\sim 7x^2.$$

По теореме 7 $b=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{7x^2}=\frac{1}{7}$.

□

Правило Лопиталя

Сейчас мы покажем, как можно вычислять пределы, используя понятие производной (см. вводную лекцию).

Теорема 9 (правило Лопиталя). Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a) и в этой окрестности $g'(x)\neq 0$. Предположим, что:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (то есть при $x\to a$ дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ превращается в неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$);

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=b$ (где b – действительное число либо одна из точек: $-\infty,+\infty$ или ∞).

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$.

Теорема остается справедливой, если вместо условия 1) потребовать выполнение следующего условия:

$1'$) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ (то есть при $x\to a$ дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ превращается в неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$).

Мы дадим доказательство этой теоремы после более глубокого изучения понятия производной.

□

Заметим, что теорема 9 остается справедливой, если в ее формулировке вместо символа $\lim\limits_{x\to a}$ везде писать $\lim\limits_{x\to a-0}$ или $\lim\limits_{x\to a+0}$. В частности, данная теорема справедлива, когда $x\to-\infty, x\to+\infty$ или $x\to\infty$.

<u>*Пример 14.*</u> Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{3x-\pi}$. Очевидно, здесь мы имеем неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$. Применяем правило Лопиталя:

$$b=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{(1-2\cos x)'}{(3x-\pi)'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin x}{3}=\frac{2}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

<u>*Пример 15.*</u> Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot arctgx\right)$. В силу непрерывности логарифмической функции, пункта 2) леммы 1 и пункта 6) теоремы 8 получаем, что предел второго сомножителя равен $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot arctgx\right)=\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty} arctgx\right)=\ln 1=0$. То есть в данном случае мы получаем неопределенность типа $\infty\cdot 0$. Преобразуем ее к неопределенности типа $\dfrac{0}{0}$ и применим правило Лопиталя:

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\cdot arctgx\right)}{x^{-1}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2arctgx}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\cdot arctgx}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\cdot arctgx}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{arctgx}=-\frac{2}{\pi}.$$

□

При решении предыдущего примера мы использовали не только правило Лопиталя, но, заменив в знаменателе $1+x^2$ на x^2, применили эквивалентность (9). На самом деле, при вычислении многих пределов применение правила Лопиталя часто комбинируется с применением эквивалентностей.

Пример 16. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\cdot\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\sin 2x}{24x}=\lim_{x\to 0}\frac{-8x}{24x}=-\frac{1}{3}.$$

□

Пример 17. 1) Докажем, что если $\alpha>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0. \qquad (14)$$

Применяя теорему 8 и правило Лопиталя, имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}}{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha\cdot x^\alpha}=\frac{1}{\infty}=0$.

2) Докажем, что если $\alpha>0$ и $\beta>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}=0. \qquad (15)$$

Имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta=0^\beta=0$.

□

Пример 18. Докажем, что при $\alpha\in R$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0. \qquad (16)$$

При $\alpha\le 0$ равенство (16) очевидно. Пусть $\alpha>0$. Пусть n – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $n\ge\alpha$. Применяя n раз правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{e^x\cdot x^{n-\alpha}}=0.$$

□

Определение 13. Будем говорить, что функция $y=f(x)$ "много меньше" функции $y=g(x)$ при $x\to a$ (обозначается $f(x)\prec\prec g(x)$ при $x\to a$), если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

□

Из равенств (14) и (16) следует, что если $\alpha>0$, то при $x\to+\infty$ $\ln x\prec\prec x^\alpha\prec\prec e^x$.

Теорема 10. Если при $x\to a$ $f(x)\prec\prec g(x)$, то $f(x)+g(x)\sim g(x)$ при $x\to a$.

Доказательство тривиально.

□

Пример 19. Вычислим предел $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}$. Имеем: $\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln\left(4^x+5x^3\right)$.

По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(4^x+5x^3\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x\ln 4+15x^2}{4^x+5x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4^x\ln 4}{4^x}=\ln 4$ (в предпоследнем равенстве была применена теорема 10 и замечание перед ней). Окончательно: $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(4^x+5x^3\right)^{\frac{1}{x}}}=e^{\ln 4}=4$. □

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ФОРМУЛ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Лекция 6

Эта лекция будет посвящена доказательству правил дифференцирования и формул из таблицы производных элементарных функций (см. вводную лекцию по технике дифференцирования).

Доказательства правил дифференцирования

Доказательство правила 1. Если $y = f(x) = c$ при всех x, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

□

Доказательство правила 2. Действуем по определению 1:

$$\left[f(x)+g(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\right]-\left[f(x)+g(x)\right]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} +$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} = f'(x)+g'(x).$$

□

Доказательство правила 3. Имеем:

$$\left[c\cdot f(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot f(x+\Delta x)-c\cdot f(x)}{\Delta x} = c\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = c\cdot f'(x).$$

□

Лемма 3. Дифференцируемая функция непрерывна; то есть (в обозначениях определения 1), если $y' = f'(x)$ существует, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$.

Доказательство. Применяя свойство 4 предела функции, имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\cdot\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x = f'(x)\cdot 0 = 0.$$

Так как здесь $f(x)$ – константа, то из свойств 1–3 предела функции легко выводим требуемое.

□

Доказательство правила 4. Применяя определение производной к функции $f(x)\cdot g(x)$, получаем:

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)+f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x+\Delta x)\cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(f(x+\Delta x)-f(x)\right)\cdot g(x)+f(x+\Delta x)\cdot\left(g(x+\Delta x)-g(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)+f(x+\Delta x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0} g(x)+\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}.$$

Пределы дробей в последней строке равны, соответственно, $f^{/}(x)$ и $g^{/}(x)$. Так как $g(x)$ – константа, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x)=g(x)$. А по лемме 3 получаем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$. Таким образом, правило 4 доказано.

□

<u>*Доказательство*</u> правила 5. Сначала рассмотрим случай ,когда числитель тождественно равен единице. Имеем:

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)^{/}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)\cdot \Delta x}=-\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=$$

$$=-\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)}\cdot g^{/}(x)=-\frac{g^{/}(x)}{g^{2}(x)}.$$

Равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x)=g(x)$ явилось следствием леммы 3.

Применяя 4-е правило дифференцирования к произвольной дроби, получаем:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]^{/}=f^{/}(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)^{/}=\frac{f^{/}(x)}{g(x)}-\frac{f(x)\cdot g^{/}(x)}{g^{2}(x)}=\frac{f^{/}(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g^{/}(x)}{g^{2}(x)}.$$

□

<u>*Доказательство*</u> правила 6. Пусть x – фиксировано и $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, строго стремящаяся к x. Обозначим $u=f(x)$ и $u_n=f(x_n)$. Из леммы 3 следует, что $u_n\to u$ при $n\to\infty$, однако, вообще говоря, эта сходимость может быть и <u>нестрогой</u> (приведите соответствующий пример!). Обозначим через $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}=\{n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots\}$ возрастающую последовательность тех натуральных чисел $n\in\mathbf{N}$, для которых $u_n\neq u$. Теперь уже $u_{n_k}\to u$ <u>строго</u> при $k\to\infty$, а для остальных индексов n (то есть при $n\in\mathbf{N}\setminus\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$) выполняется равенство $u_n=u$. Рассмотрим такую последовательность z_n, что $z_n=\dfrac{g(u_{n_k})-g(u)}{u_{n_k}-u}$, если существует такое k, что $n=n_k$, и $z_n=g^{/}(u)$, если $n\in\mathbf{N}\setminus\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=g^{/}(u)=g^{/}(f(x))$. Так как $\forall n\in\mathbf{N}$ $g(u_n)-g(u)=z_n\cdot(u_n-u)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(f(x_n))-g(f(x))}{x_n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(u_n)-g(u)}{x_n-x}=\lim_{n\to\infty}\left(z_n\cdot\frac{u_n-u}{x_n-x}\right)=\lim_{n\to\infty} z_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}=g^{/}(f(x))\cdot f^{/}(x).$$

Ввиду произвольности последовательности $\{x_n\}$, из определения 8 следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(f(x+\Delta x))-g(f(x))}{\Delta x}$ существует и равен $g^{/}(f(x))\cdot f^{/}(x)$, что и доказывает формулу $\left[g(f(x))\right]^{/}=g^{/}(f(x))\cdot f^{/}(x)$.

□

Вывод производных степенной, показательной и логарифмической функций

Докажем сначала формулу $(\ln x)^{/}=\dfrac{1}{x}$. Имеем:

$$(\ln x)^{/}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Так как x – положительная константа, то $\frac{\Delta x}{x}\to 0$. Применяя 2-й замечательный предел, получаем: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e$. Используя теперь пункт 2) леммы 1, имеем окончательно:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\cdot\ln e=\frac{1}{x}.$$

Теперь легко получается формула для произвольной логарифмической функции:

$$\left(\log_a x\right)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}.$$

Выведем производную степенной функции. Применим так называемый метод логарифмического дифференцирования. Так как $y=x^{\alpha}$, то $\ln y=\alpha\cdot\ln x$. Дифференцируя обе части полученного равенства и применяя в левой части цепное правило, имеем:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\alpha\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow y'=\alpha\cdot x^{-1}\cdot y=\alpha\cdot x^{-1}\cdot x^{\alpha}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

Тот же метод применим для вывода производной показательной функции:

$$y=a^x\Rightarrow\ln y=x\cdot\ln a\Rightarrow\frac{1}{y}\cdot y'=\ln a\Rightarrow y'=y\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a.$$

Вывод производных тригонометрических функций

Покажем, что $(\sin x)'=\cos x$. Имеем:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

В процессе вычислений мы применили эквивалентность $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sim\frac{\Delta x}{2}$ при $\Delta x\to 0$ и непрерывность косинуса, выразившуюся в последнем равенстве.

Теперь, применяя формулы приведения и цепное правило, получаем:

$$(\cos x)'=\left(\sin(x+\frac{\pi}{2})\right)'=\cos(x+\frac{\pi}{2})=-\sin x.$$

Далее:

$$\left(tgx\right)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично выводится производная котангенса.

Вывод производных обратных тригонометрических функций

<u>*Лемма 4.*</u> Пусть непрерывная функция $y=g(x)$ с областью определения $\mathbb{D}(g)$ и множеством значений J обратна по отношению к функции $x=f(y)$, у которой в точке $y\in J$ $f'(y)\neq 0$. Тогда в соответствующей точке $x=f(y)$ функция g дифференцируема и справедлива формула:

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}\subset \mathbb{D}(g)$ – произвольная последовательность, строго стремящаяся к x. Из условий леммы следует, что $\forall n\in\mathbf{N}$ существует единственное число $y_n\in J$, такое, что $f(y_n)=x_n$. Отсюда вытекает, что $y_n=g(x_n)$ и в силу непрерывности функции g $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=g(x)=y$. При этом ясно, что $y_n\to y$ строго. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(x_n)-g(x)}{x_n-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-y}{f(y_n)-f(y)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\dfrac{f(y_n)-f(y)}{y_n-y}}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(y)}{y_n-y}}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(g(x))}.$$

Ввиду произвольности последовательности $\{x_n\}$, из определения 8 следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ существует и равен $\dfrac{1}{f'(g(x))}$, что и доказывает формулу (17).

□

Выведем теперь формулу для производной арксинуса. Положим $y=g(x)=\arcsin x$, а $x=f(y)=\sin y$. Известно, что функция $y=g(x)=\arcsin x$ непрерывна на своей области определения $\mathbb{D}(g)=[-1,1]$ (см. теорему 3), имеет множество значений $J=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, на котором определена обратная ей функция $x=f(y)=\sin y$. При этом $\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $(\sin y)'=\cos y>0$. По формуле (17) в соответствующих точках $x\in(-1,1)$:

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos(\arcsin x)}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Из хорошо известной формулы $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ немедленно получаем:

$$(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Выведем формулу для производной арктангенса. Положим $y=g(x)=arctgx$, а $x=f(y)=tgy$. Известно, что функция $y=g(x)=arctgx$ непрерывна на своей области определения $\mathbb{D}(g)=(-\infty,+\infty)$ (см. теорему 3), имеет множество значений $J=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, на котором определена обратная ей функция $x=f(y)=tgy$. При этом $\forall y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $(tgy)'=\dfrac{1}{\cos^2 y}>0$. По формуле (17) в соответствующих точках $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$(arctgx)'=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(arctgx)}}=\frac{1}{1+tg^2(arctgx)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

Опять из известной формулы $arctgx+arcctgx=\dfrac{\pi}{2}$ получаем:

$$(arcctgx)'=\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)'=-(arctgx)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение высшего образования

Донской государственный технический университет

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Раздел 2: применение производных к исследованию функций

Курс лекций

Ростов-на-Дону
2021

УДК 517(07)
Теория пределов и дифференциальное исчисление. Раздел 2: применение производных к исследованию функций. (Курс лекций).— Ростов-на-Дону: Донской государственный технический университет, 2021, 22 с.

Изложен курс лекций по применению производных к исследованию функций.

Методические указания предназначены для студентов, проходящих обучение на кафедре высшей математики ДГТУ.

Составители: зав. кафедрой высшей математики, д.ф.-м.н., профессор Павлов И.В.

Рецензенты: к.ф.-м.н., доцент А.М. Можаев, к.ф.-м.н., доцент Г.А. Власков

Общее редактирование и компьютерный набор И.В. Павлова

ЧАСТЬ 2: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Лекция 7

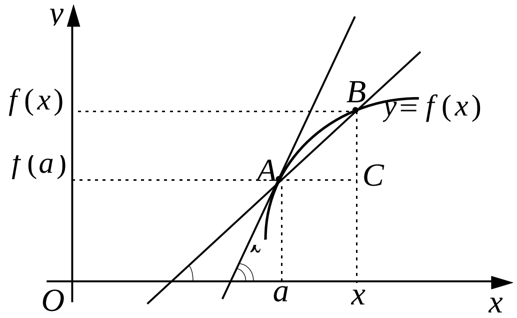
Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормали к графику функции

<u>*Теорема 11.*</u> Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$. Тогда $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x=a$ в том и только в том случае, когда график данной функции имеет касательную в точке $A(a, f(a))$, непараллельную оси *Oy*. При этом

$$f'(a)=tg\alpha, \tag{18}$$

где α – угол наклона касательной по отношению к оси Ox.

<u>*Доказательство.*</u> Построим чертеж:



Напомним, что касательной к кривой в точке *A* называется предельное положение секущей прямой *AB*, когда точка *B*, двигаясь по данной кривой, приближается к точке *A* (то есть расстояние $\rho(A,B)$ между точками *A* и *B* стремится к нулю).

Предположим, что $x\to a$ строго , то есть *x* приближается к *a* по произвольной последовательности, строго стремящейся к *a* (см. определение 7). Имеем:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{CB}{CA}=\lim_{x\to a}tg\beta. \tag{19}$$

Когда $x\to a$, $\rho(A,B)=\sqrt{(x-a)^2+\left(f(x)-f(a)\right)^2}\to 0$ в силу непрерывности функции $y=f(x)$ в точке $x=a$. Поэтому, если предельное положение ℓ секущей *AB* существует, то отсюда следует, что $\beta\to\alpha$, причем $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, так как по условию теоремы ℓ непараллельна *Oy*. Пользуясь непрерывностью функции тангенс, из (19) получаем (18).

Обратно, если $f'(a)$ существует, то из (19) следует существование конечного предела $\lim\limits_{x\to a}tg\beta$. Из непрерывности функции арктангенс и из неравенства $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$ вытекает, что предел $\lim\limits_{x\to a}\beta=\lim\limits_{x\to a}arctg(tg\beta)=arctg(\lim\limits_{x\to a}tg\beta)$ существует и находится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. А это означает существование предельного положения ℓ секущей *AB*, причем ℓ непараллельна оси *Oy*.

□

Итак, равенство (18) показывает, что $f'(a)=k$, где k – угловой коэффициент касательной ℓ. Применяя формулу (47) из лекций по линейной алгебре и аналитической геометрии (ЛЛААГ), получаем уравнение касательной ℓ:

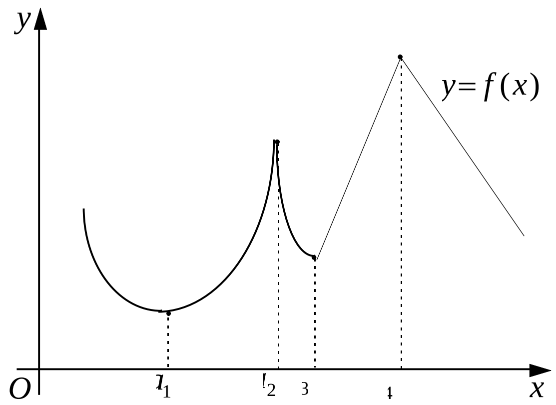
$$\ell:\ y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a). \tag{20}$$

Используя соотношение между угловыми коэффициентами взаимно перпендикулярных прямых (см. формулу (52) из ЛЛААГ), получаем уравнение нормали *n* (то есть прямой, проходящей через точку касания *A* и перпендикулярной ℓ):

$$n:\ y=-\frac{1}{f'(a)}\cdot(x-a)+f(a). \tag{21}$$

Понятие локального экстремума. Основные теоремы дифференциального исчисления

<u>*Определение 14.*</u> Говорят, что в точке $a \in R$ функция $y = f(x)$ имеет локальный максимум (соответственно, локальный минимум), если существует δ-окрестность U точки a (см. определение 3), такая, что $\forall x \in U$ $f(x) \le f(a)$ (соответственно, $f(x) \ge f(a)$). Локальные максимумы и локальные минимумы называются локальными экстремумами.



□

На представленном рисунке в точках a_1, a_2, a_3, a_4 функция $y = f(x)$ имеет локальный экстремум: в точках a_1 и a_3 – локальный минимум, а в точках a_2 и a_4 – локальный максимум. При этом во всех этих точках функция непрерывна, но только в одной точке a_1 имеет конечную производную. Функция, представленная в примере 7, разрывна в точке $x = 2$ и имеет в этой точке локальный максимум.

Следующая теорема, выражающая собой <u>необходимый признак локального экстремума</u>, позволит нам делать заключение о значении производной в точках локального экстремума.

<u>*Теорема 12*</u> (теорема Ферма). Если в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ дифференцируема и имеет локальный экстремум, то $f'(a) = 0$.

<u>*Доказательство.*</u> Пусть, например, a – точка минимума. Если последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно возрастает к a, то $x_n < a$, а $f(x_n) \ge f(a)$, значит $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \le 0$ и по свойству 6 предела последовательности имеем:

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \le 0. \tag{22}$$

Аналогично, если $\{x_n\}$ строго монотонно убывает к a, то $x_n > a$, $f(x_n) \ge f(a)$ и

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \ge 0. \tag{23}$$

Из неравенств (22) и (23) следует, что $f'(a) = 0$.

□

Формула (20) дает следующую геометрическую интерпретацию теоремы Ферма: если в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ дифференцируема, то она в этой точке имеет локальный экстремум тогда и только тогда, когда касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке $A(a, f(a))$, параллельна оси Ox. Читателю предлагается построить соответствующий рисунок.

Заметим, что условие $f^{/}(a)=0$ <u>недостаточно</u> для существования локального экстремума в точке $x=a$. Действительно, функция $y=x^3$ имеет в точке $x=a=0$ производную, равную нулю, однако при $x<0$ $y=x^3<0$, а при $x>0$ $y=x^3>0$. Таким образом, определение 14 не выполняется. Читателю предлагается построить график функции $y=x^3$.

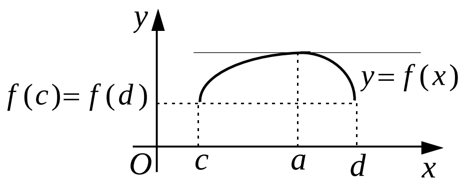
В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказательство которой выходит за рамки нашей программы.

<u>*Лемма 5.*</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на конечном замкнутом интервале $\left[c,d\right]$, то она ограничена на этом интервале, хотя бы в одной точке этого интервала принимает свое минимальное значение m и хотя бы в одной точке этого интервала принимает свое максимальное значение M.

□

<u>*Теорема 13*</u> (теорема Ролля). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на конечном замкнутом интервале $\left[c,d\right]$, дифференцируема на интервале (c,d) и удовлетворяет условию $f(c)=f(d)$. Тогда существует хотя бы одна точка $a\in(c,d)$, такая, что $f^{/}(a)=0$.

<u>*Доказательство.*</u> Если $f(x)=const$ на $\left[c,d\right]$, то в качестве a можно взять любую точку интервала (c,d). Пусть $\exists x\in(c,d)$: $f(x)>f(c)=f(d)$. По лемме 5 в некоторой точке $a\in\left[c,d\right]$ функция $y=f(x)$ принимает свое максимальное значение. Ясно, что в данном случае $a\neq c$ и $a\neq d$. Поэтому $a\in(c,d)$. По теореме Ферма $f^{/}(a)=0$.



Случай существования $x\in(c,d)$: $f(x)<f(c)=f(d)$ рассматривается аналогично.

□

<u>*Теорема 14*</u> (теорема Коши). Пусть функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ непрерывны на конечном замкнутом интервале $\left[c,d\right]$ и дифференцируемы на интервале (c,d). Тогда существует хотя бы одна точка $a\in(c,d)$, такая, что

$$\left(f(d)-f(c)\right)\cdot g^{/}(a)=\left(g(d)-g(c)\right)\cdot f^{/}(a). \tag{24}$$

<u>*Доказательство.*</u> Рассмотрим функцию $y=F(x)$, заданную с помощью определителя:

$$F(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(c) & g(c) & 1 \\ f(d) & g(d) & 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $y=F(x)$ непрерывна на $\left[c,d\right]$, дифференцируема на (c,d) и удовлетворяет условию $F(c)=F(d)=0$ (последнее вытекает из свойства 3 определителей; см. ЛЛААГ). По теореме Ролля существует хотя бы одна точка $a\in(c,d)$, такая, что $F^{/}(a)=0$. Раскладывая определитель по первой строке и производя дифференцирование, легко приводим последнее равенство к виду (24).

□

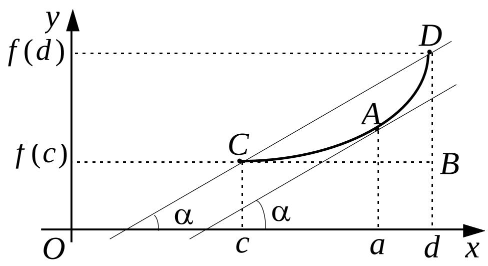
<u>*Теорема 15*</u> (теорема Лагранжа). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на конечном замкнутом интервале $\left[c,d\right]$ и дифференцируема на интервале (c,d). Тогда существует хотя бы одна точка $a\in(c,d)$, такая, что

$$f(d)-f(c)=f^{/}(a)\cdot(d-c). \tag{25}$$

<u>*Доказательство.*</u> Доказательство немедленно следует из формулы (24), если положить $g(x)=x$.

□

Интересен геометрический смысл теоремы Лагранжа. Для того, чтобы найти точку *a*,



построим прямую *CD* (как показано на рисунке) и будем передвигать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она не станет касательной к графику функции $y=f(x)$ в некоторой точке *A*. Абсцисса *a* точки *A* и будет точкой, удовлетворяющей равенству (25). Действительно, $f'(a)=tg\alpha=\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{f(d)-f(c)}{d-c}$.

Доказательство теоремы 9 (правила Лопиталя)

Доказательство проведем только для неопределенности типа $\frac{0}{0}$. Доопределяем, если это необходимо, функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ в точке $x=a$ равенствами: $f(a)=0, g(a)=0$. Тогда из условий 1) данной теоремы следует, что эти функции непрерывны в точке $x=a$.

Предположим сначала, что $x_n\to a$, строго монотонно убывая. Так как функция $y=g(x)$ на интервале $[a,x_n]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа, то существует $\xi_n\in(a,x_n)$, такое, что $g(x_n)-g(a)=g'(\xi_n)\cdot(x_n-a)$. Но из условий теоремы 9 следует, что $g'(\xi_n)\neq 0$ при достаточно больших *n*. Следовательно при тех же *n* $g(x_n)-g(a)\neq 0$. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{g(x_n)-g(a)}. \tag{26}$$

Так как функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ на интервале $[a,x_n]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши, то существует $\eta_n\in(a,x_n)$, такое, что $\big(f(x_n)-f(a)\big)\cdot g'(\eta_n)=\big(g(x_n)-g(a)\big)\cdot f'(\eta_n)$, а поскольку $g'(\eta_n)\neq 0$, то $f(x_n)-f(a)=\dfrac{\big(g(x_n)-g(a)\big)\cdot f'(\eta_n)}{g'(\eta_n)}$. Подставляя это в (26), получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\eta_n)}{g'(\eta_n)}.$$

Но очевидно, что $\eta_n\to a$ строго. Поэтому, применяя условие 2) данной теоремы, получаем, что последний предел равняется *b*. То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}=b$, а это означает, что $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$. По теореме 2 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=b$.

□

Заметим, что из существования предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ в общем случае не следует существование предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Рассмотрим, например, функции $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ и $g(x)=x$. Ясно, что эти функции дифференцируемы при $x\neq 0$ и $g'(x)=1\neq 0$. Далее, так как $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, а $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leq 1$ при $x\neq 0$, то по свойству 8 предела функции $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. Очевидно также, что $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$. Имеем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$ опять же по свойству 8 предела функции. Однако $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$, а последний предел не существует, поскольку

$\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ не существует (действительно, если взять последовательность $x_n=\dfrac{1}{\pi n}\to 0$, то $\cos\dfrac{1}{x_n}=\cos\pi n=(-1)^n$, то есть нечетные члены полученной последовательности равны –1, а четные равны +1; ср. с пунктом 2) примера 2).

ЧАСТЬ 2: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Лекция 8

Исследование на монотонность и нахождение экстремумов функций

Определение 15. Пусть J – некоторый интервал на действительной прямой. Говорят, что функция $y=f(x)$ монотонно возрастает (соответственно, строго монотонно возрастает) на J, если $\forall x_1, x_2 \in J$, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство:

$$f(x_1)\le f(x_2) \text{ (соотв., } f(x_1)<f(x_2)). \qquad (27)$$

Если неравенства в (27) заменить на противоположные, то получаем определение монотонно убывающей (соотв., строго монотонно убывающей) функции.

□

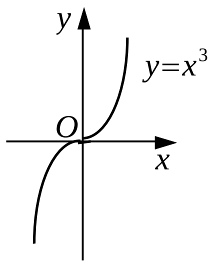
Теорема 16 (критерий монотонности). Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на открытом интервале (c,d).

1) $y=f(x)$ монотонно возрастает на (c,d) тогда и только тогда, когда $\forall x\in(c,d)$ $f'(x)\ge 0$.
2) $y=f(x)$ монотонно убывает на (c,d) тогда и только тогда, когда $\forall x\in(c,d)$ $f'(x)\le 0$.

Доказательство. Докажем лишь пункт 1) (пункт 2) доказывается аналогично). Если $y=f(x)$ монотонно возрастает на (c,d), то, заменив в доказательстве теоремы Ферма (теорема 12) a на x и проводя рассуждения по той же схеме, без труда получаем неравенство $f'(x)\ge 0$.

Обратно, пусть $\forall x\in(c,d)$ $f'(x)\ge 0$ и $x_1, x_2\in(c,d)$ такие, что $x_1<x_2$. По теореме Лагранжа (теорема 15) существует точка $\xi\in(x_1,x_2)$, такая, что $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)\cdot(x_2-x_1)$. Так как $f'(\xi)\ge 0$, то из полученного равенства следует $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$, или $f(x_2)\ge f(x_1)$.

□



Пример 20. Рассмотрим функцию $y=f(x)=x^3$. Так как $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $f'(x)=3x^2\ge 0$, то из теоремы 16 следует, что эта функция монотонно возрастает на всей действительной прямой. Легко видеть, что на самом деле $y=x^3$ строго монотонно возрастает на $(-\infty,+\infty)$ (докажите это!). При этом, однако, $f'(0)=0$.

□

Пример 20 показывает, что в полном объеме аналог теоремы 16 не может быть сформулирован для строго монотонных функций. Однако справедлива следующая теорема, доказательство которой дословно повторяет вторую часть доказательства теоремы 16.

Теорема 17. Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на открытом интервале (c,d).

1) Если $\forall x\in(c,d)$ $f'(x)>0$, то $y=f(x)$ строго монотонно возрастает на (c,d).
2) Если $\forall x\in(c,d)$ $f'(x)<0$, то $y=f(x)$ строго монотонно убывает на (c,d).

□

Определение 16. Точка $x=a$ называется критической точкой функции $y=f(x)$, если удовлетворяется одно из следующих трех условий:

1) точка $x=a$ стационарна, то есть $f^{/}(a)=0$ (см. теорему 12);
2) в точке $x=a$ производная $f^{/}(a)$ не существует, однако функция $y=f(x)$ непрерывна в этой точке;
3) функция $y=f(x)$ имеет разрыв в точке $x=a$.

□

Принимая во внимание теорему Ферма, легко видеть, что если функция имеет локальный экстремум в точке $x=a$, то эта точка является критической. Обратное неверно ни в одном из случаев, перечисленных в определении 16. Читателю предлагается построить соответствующие графики.

<u>*Определение 17.*</u> Будем говорить, что функция $y=\varphi(x)$ меняет знак (соответственно, не меняет знака) при переходе через точку $x=a$, если она определена в некоторой δ-окрестности точки a (за исключением, быть может, самой точки a), сохраняет знак на интервале $(a-\delta,a)$ и на интервале $(a,a+\delta)$ и знаки функции $y=\varphi(x)$ на этих интервалах различны (соотв., одинаковы). □

<u>*Теорема 18*</u> (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$. Если при переходе через эту точку производная $f^{/}(x)$

1) меняет знак "+" на "–", то $x=a$ – точка локального максимума;
2) меняет знак "–" на "+", то $x=a$ – точка локального минимума;
3) не меняет знака, то $x=a$ не является точкой локального экстремума.

<u>*Доказательство.*</u> 1) Пусть $x\in(a-\delta,a)$, последовательность $\{x_n\}$ строго монотонно возрастает к a и $\forall n\colon x<x_n$. Так как на $(a-\delta,a)$ производная данной функции положительна, то по теореме 16 $f(x)\le f(x_n)$ для $\forall n=1,2,\ldots$.Применяя свойство 6 предела последовательности и непрерывность функции в точке a, получаем: $f(x)\le\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$. Аналогично, для $x\in(a,a+\delta)$ также получаем $f(x)\le f(a)$. Остается принять во внимание определение 14.

Пункт 2) доказывается точно так же, как пункт 1).

Докажем 3). Пусть производная до точки a и после точки a имеет знак "+". Рассуждая, как в пункте 1), получаем $f(x)\le f(a)$ при $x\in(a-\delta,a)$ и $f(x)\ge f(a)$ при $x\in(a,a+\delta)$. Если бы в точке $x=a$ был экстремум (например, максимум), то существовала бы такая точка $\xi\in(a,a+\delta)$, что $f(x)\le f(a)$ при $x\in(a,\xi)$. Следовательно, $f(x)=f(a)$ при $x\in(a,\xi)$, Что противоречит (в силу теоремы 17) строго монотонному возрастанию функции на (a,ξ). Полученное противоречие доказывает, что экстремума в точке $x=a$ нет.

□

<u>*Пример 21.*</u> Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y=f(x)=\dfrac{1}{60}(2x^3+3x^2-36x-20)$. Очевидно, $\mathbb{D}(y)=R$. Находим производную и затем приравниваем ее к нулю, чтобы найти критические точки: $y^{/}=\dfrac{1}{60}(6x^2+6x-36)=\dfrac{1}{10}(x^2+x-6)$; $y^{/}=0\Leftrightarrow x^2+x-6=0\Leftrightarrow x_1=-3, x_2=2$. Теперь, применяя известный из школьного курса "метод интервалов", заполним таблицу:

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,2)$	2	$(2,+\infty)$
$y^{/}$	+	0	–	0	+
y	$\nearrow$	$\dfrac{61}{60}$	$\searrow$	$-\dfrac{16}{15}$	$\nearrow$
		max		min	

Напомним, что в первой строке таблицы расписывается область определения функции, раздробленная на интервалы критическими точками. Во второй строке с помощью "пробных точек" вычисляются знаки производных на интервалах дробления. Действительно, если производная непрерывна вне критических точек, то она сохраняет знак на каждом интервале дробления. Поэтому для определения этого знака, достаточно вычислить знак в произвольно взятой "пробной точке" интервала. Например, чтобы вычислить знак производной на интервале $(-\infty,-3)$, достаточно взять, скажем, точку $x=-10$, подставить ее в выражение y' и определить знак числа $y'(-10)$. Очевидно, это знак "+". Точно так же вычисляются знаки производной на остальных интервалах. Ниже точек –3 и 2 ставим число 0, равное значению производной в этих точках.

В третьей строке, опираясь на теорему 17, стрелками указываем характер монотонности функции на каждом интервале, а также записываем значения функций в критических точках. Ниже этих значений, применяя теорему 18, отмечаем наличие или отсутствие локального экстремума, а также в виде куска графика отображаем поведение функции в окрестности критической точки.

□

<u>*Пример 22.*</u> Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y=\dfrac{(x-2)^3}{(x-3)^2}$. Имеем: $\mathbb{D}(y)=(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$ и $y'=\dfrac{3(x-2)^2(x-3)^2-(x-2)^3\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4}=$

$=\dfrac{(x-2)^2(x-3)(3x-9-2x+4)}{(x-3)^4}=\dfrac{(x-2)^2(x-5)}{(x-3)^3}$. Далее, $y'=0\Leftrightarrow(x-2)^2(x-5)=0\Leftrightarrow x_1=2,\, x_2=5$ (заметим, что $x_1=2$ – кратный корень). Построим таблицу:

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	$(3,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+	0	+	–	0	+
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\nearrow$
		нет extr			min	

Заметим, что мы не внесли в таблицу значение аргумента $x=3$, так как оно не входит в $\mathbb{D}(y)$ и, следовательно, бессмысленно говорить об экстремуме в этой точке.

□

<u>*Пример 23.*</u> Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y=x^3e^{-x}$. Имеем: $\mathbb{D}(y)=R$ и $y'=3x^2e^{-x}-x^3e^{-x}=e^{-x}x^2(3-x)$. Далее, $y'=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(3-x)=0\Leftrightarrow x_1=0,\, x_2=3$ ($x_1=0$ – двукратный корень). Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	+	0	–
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{27}{e^3}$	$\searrow$
		нет extr		max	

□

Заметим, что в примерах 22 и 23 именно двукратные корни производной являлись критическими точками, но не экстремумами соответствующих функций. Легко доказать, что если производная непрерывна и ее корень имеет четную кратность, то он не является точкой экстремума исследуемой функции.

Пример 24. Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y=2|x+2|+3\sqrt[3]{x^2}$. Имеем $\mathbb{D}(y)=R$, однако можно доказать, что в точке $x=-2$ производная y' не существует (здесь сказывается неблагоприятное влияние члена $2|x+2|$). Нетрудно также видеть, что y' не существует в точке $x=0$ (можно сказать, что в этой точке производная равна бесконечности). Если $x>-2$, то $y=2x+4+3\sqrt[3]{x^2}$, $y'=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2(\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}}$ и $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Leftrightarrow x=-1$. Если же $x<-2$, то $y=-2x-4+3\sqrt[3]{x^2}$, $y'=-2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$ и $y'=0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Однако этот корень не принадлежит рассматриваемому интервалу и поэтому должен быть отброшен. Итак, мы получили три критические точки (см. определение 15): точки $x_1=-2$ и $x_2=0$, в которых функция непрерывна, но производная не существует, и стационарную точку $x_3=-1$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	–	не сущ.	+	0	–	не сущ.	+
y	$\searrow$	$3\sqrt[3]{4}$	$\nearrow$	5	$\searrow$	4	$\nearrow$
		min		max		min	

□

Пример 25. Найдем интервалы монотонности и точки локального экстремума функции $y=f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2},\ x\neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2},\ x=0. \end{cases}$. Ясно, что $\mathbb{D}(y)=R$. Для того, чтобы выяснить, является ли данная функция непрерывной в точке $x=0$, вычислим ее левый и правый предел при $x\to 0$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0} arctg\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}=f(0)$ (см. пункт 6) теоремы 8). Однако, по той же теореме $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0} arctg\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+0=-\dfrac{\pi}{2}\neq f(0)$. Поэтому $x=0$ – точка разрыва данной функции и производной в этой точке у нее нет. При $x\neq 0$:
$y'=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{x^2-1}{2(x^2+1)}$ и $y'=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=1$. Итак, мы получили три критические точки (см. определение 15): стационарные точки $x_1=-1$ и $x_2=1$ и точку разрыва функции $x_3=0$. Построим таблицу:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	$-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$
		max		max		min	

Так как точка $x_3=0$ не подпала под условия теоремы 18, то мы получили нужный нам вывод с учетом вычисленных левого и правого предела. □

ЧАСТЬ 2: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Лекция 9

Асимптоты графика функции. Построение эскиза графика функции

Пусть даны функция $y=f(x)$, прямая $\ell: Ax+By+C=0$, точка $M\big(x, f(x)\big)$ на графике функции $y=f(x)$ и обозначим через M' проекцию точки M на прямую ℓ.

<u>*Определение 18.*</u> Прямая $\ell: Ax+By+C=0$ называется левосторонней (соответственно, правосторонней) асимптотой графика функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ (a может принимать и бесконечные значения), если при $x\to a-0$ (соотв. при $x\to a+0$) $\rho\big(M,O\big)=\sqrt{x^2+f^2(x)}\to+\infty$, а $\rho\big(M,M'\big)\to 0$ (где $\rho\big(M,M'\big)$ – расстояние между точками M и M').

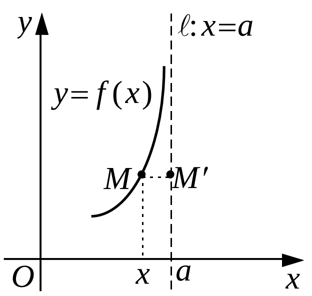
□

Известно (см. ЛЛААГ), что уравнение прямой ℓ можно записать либо в виде $x=a$, либо в виде $y=kx+b$.

<u>*Теорема 19.*</u> Прямая $\ell: x=a$ (здесь a – конечное число) является левосторонней (соотв., правосторонней) асимптотой графика функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \qquad (\text{соотв, } \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty). \tag{28}$$

<u>*Доказательство.*</u> Проведем доказательство только для левосторонних асимптот.



Пусть $\ell: x=a$ – левосторонняя асимптота. Применяя определение 18, получаем:

$$\lim_{x\to a-0} f^2(x)=\lim_{x\to a-0}\left(\rho^2(M,O)-x^2\right)=+\infty-a^2=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to a-0} f(x)=\infty.$$

Обратно, пусть $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$.Тогда ясно, что $\lim\limits_{x\to a-0}\rho\big(M,O\big)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a-0}\rho\big(M,M'\big)=\lim\limits_{x\to a-0}(a-x)=0$, то есть по определению 18 $\ell: x=a$ – левосторонняя асимптота.

□

Заметим, что прямая $\ell: x=a$ не может быть асимптотой графика функции $y=f(x)$ ни в одной другой точке $\tilde{a}\neq a$ (докажите это!). Асимптоты вида $\ell: x=a$ часто называют вертикальными асимптотами.

<u>*Следствие.*</u> График функции, непрерывной на всей числовой прямой, не имеет вертикальных асимптот. □

<u>*Теорема 20.*</u> 1)Если прямая $\ell: y=kx+b$ является левосторонней (соотв., правосторонней) асимптотой графика функции $y=f(x)$ на бесконечности, то

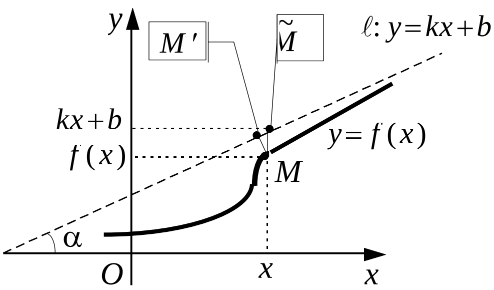
$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad (\text{соотв., } k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}) \tag{29}$$

и

$$b=\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx\big) \qquad (\text{соотв., } b=\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)). \tag{30}$$

2) Если пределы (29) и (30) существуют и конечны, то прямая $\ell: y=kx+b$ является левосторонней (соотв., правосторонней) асимптотой графика функции $y=f(x)$ на бесконечности.

Доказательство. Доказательство проведем только для правосторонней асимптоты.



1) Пусть $\ell\colon y=kx+b$ – правосторонняя асимптота графика функции $y=f(x)$ (см. рисунок). Имеем: $f(x)=kx+b-M\tilde{M}=kx+b-\dfrac{MM'}{\cos\angle M'M\tilde{M}}=kx+b-\dfrac{MM'}{\cos\alpha}$, где $MM'\to 0$ при $x\to+\infty$ (см. определение 18). Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(b-\dfrac{MM'}{\cos\alpha}\right)=b$, что доказывает равенство (30). Теперь (29) следует из (30):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-kx}{x}+k\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-kx}{x}+k=\frac{b}{+\infty}+k=k\,.$$

2) Обратно, пусть пределы (29) и (30) существуют и конечны. Опять из соотношения $f(x)=kx+b-M\tilde{M}$ получаем: $\lim\limits_{x\to+\infty}M\tilde{M}=\lim\limits_{x\to+\infty}\Big(b-\big(f(x)-kx\big)\Big)=b-\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx\big)=b-b=0$. Так как $\rho(M,M')=|MM'|\le|M\tilde{M}|$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(M,M')\le\lim\limits_{x\to+\infty}|M\tilde{M}|=0$, то есть $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(M,M')=0$. Соотношение $\lim\limits_{x\to+\infty}\rho(M,O)=+\infty$ очевидно. Таким образом, $\ell\colon y=kx+b$ – правосторонняя асимптота графика функции $y=f(x)$ на бесконечности.

□

Заметим, что прямая $\ell\colon y=kx+b$ не может быть асимптотой графика функции $y=f(x)$ ни в одной точке $a\ne\pm\infty$ (докажите это!). Асимптоты вида $\ell\colon y=kx+b$ часто называют наклонными асимптотами. В частности, если $k=0$, то такие асимптоты называют горизонтальными.

Теорема 21. Пусть $y=f(x)$ – рациональная дробь, то есть

$$f(x)=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\,,$$

где $a_n\ne 0, b_m\ne 0$, причем числитель и знаменатель не имеют одинаковых действительных корней. Тогда:

1) если x_0 – действительный корень знаменателя дроби, то $\ell\colon x=x_0$ – вертикальная асимптота графика функции $y=f(x)$;
2) график функции $y=f(x)$ имеет наклонные асимптоты тогда и только тогда, когда $n\le m+1$; при этом наклонные асимптоты в точках $-\infty$ и $+\infty$ совпадают.

Доказательство. Доказательство пункта 1) просто и предоставляется читателю. Докажем 2). Применяя теорему 6, имеем:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^{m+1}+b_{m-1}x^m+\ldots+b_1x^2+b_0x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^{m+1}}=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{m+1-n}}=\begin{cases}\infty, & n>m+1\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m+1\\ 0, & n<m+1\end{cases}. \quad (31)$$

Если $n>m+1$, то по теореме 20 асимптот нет. Если $n=m+1$, то

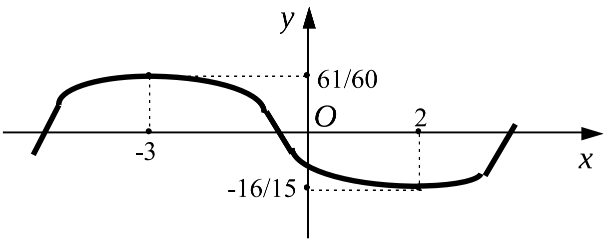
$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_{m+1}x^{m+1}+a_mx^m+\ldots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}-\frac{a_{m+1}x}{b_m}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0}\,,$$

где степень многочлена $P(x)$ не превосходит m (докажите это!). Опять применяя теорему 6, получаем конечность числа b.

Если $n<m+1$, то $k=0$, и конечность числа $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)$ снова следует из теоремы 6.

□

<u>*Пример 26*</u> (продолжение примера 21). Так как многочлен $y=f(x)=\dfrac{1}{60}(2x^3+3x^2-$ $-36x-20)$ непрерывен на всей числовой прямой, то по следствию из теоремы 19 график этой функции не имеет вертикальных асимптот. Наклонных асимптот также нет, так как здесь $n=3$, а $m=0$ (см. п. 2) теоремы 21). Построим эскиз графика данной функции. Начинаем построение с кусков графиков в окрестностях критических точек (см. таблицу в примере 21), а затем соединяем эти куски так, чтобы получилась непрерывная кривая. Уточнение этого графика будет произведено с помощью исследования второй производной. □

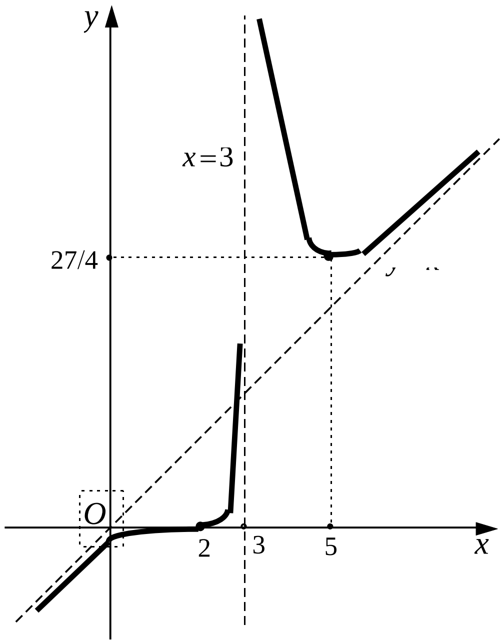


<u>*Пример 27*</u> (продолжение примера 22). По теореме 21 рациональная дробь $y=\dfrac{(x-2)^3}{(x-3)^2}$ имеет вертикальную асимптоту $x=3$. По той же теореме, так как $n=3$, а $m=2$, данная функция имеет двухстороннюю наклонную асимптоту. По формуле (31) $k=1$. Найдем b:

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\Big(f(x)-kx\Big)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-2)^3}{(x-3)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-6x^2+12x-8-x^3+6x^2-9x}{(x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-8}{(x-3)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x^2}=0.$$

Итак, наклонная асимптота задается уравнением $y=x$.

Построение эскиза графика начинаем с критических точек и асимптот, которые будем наносить штриховыми линиями. Если x приближается к 3, то соответствующие точки графика функции уходят вверх (см. данные таблицы в примере 22 о поведении функции на интервалах $(-\infty,3)$ и $(3,5)$). Если $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$, то соответствующие точки графика приближаются к наклонной асимптоте $y=x$. Если рассуждать априорно, то в принципе соответствующие ветви графика могут приближаться к асимптоте и с другой стороны. Точно ответить на этот вопрос мы сможем после нахождения точек перегиба и интервалов выпуклости.

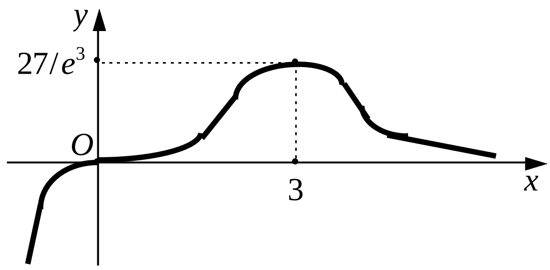


□

<u>*Пример 28*</u> (продолжение примера 23). Очевидно, график функции $y=x^3e^{-x}$ не имеет вертикальных асимптот. Исследуем наличие наклонных асимптот. Принимая во внимание равенство (16), получаем:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0,$$

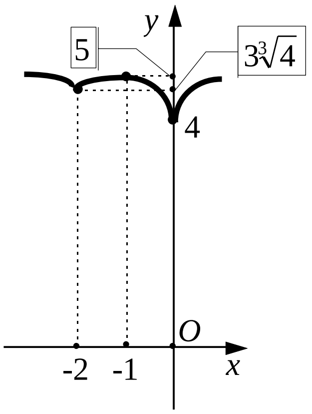
$$b=\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x)-kx\Big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=0.$$



Итак, мы получили правостороннюю горизонтальную асимптоту $y=0$. Посмотрим, есть ли левосторонняя наклонная асимптота. Имеем: $k=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-x}=+\infty$. Согласно теореме 20, левосторонней наклонной асимптоты нет.

□

<u>Пример 29</u> (продолжение примера 24). Очевидно, график функции $y=2|x+2|+3\sqrt[3]{x^2}$ не имеет вертикальных асимптот. Проведем исследование на наличие наклонных асимптот. Применяя выражение функции при $x>-2$, получаем: $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4+3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$, однако $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+4+3\sqrt[3]{x^2}-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+3\sqrt[3]{x^2}\right)=+\infty$. Следовательно, правосторонней наклонной асимптоты нет. Аналогично доказывается, что и левосторонней наклонной асимптоты также нет (проделайте это!).

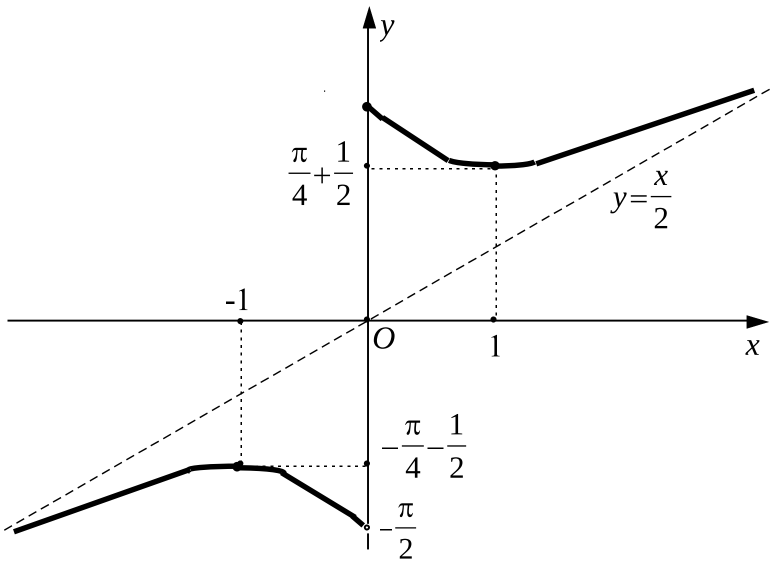


□

<u>Пример 30</u> (продолжение примера 25). Функция $y=f(x)=\begin{cases} arctg\frac{1}{x}+\frac{x}{2}, & x\neq 0,\\ \frac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$ имеет одну точку разрыва: $x=0$. Однако в этой точке график данной функции не имеет вертикальной асимптоты, так как (см. вычисления в примере 25) оба предела $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\frac{\pi}{2}$ и $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=-\frac{\pi}{2}$ конечны. Посмотрим, есть ли наклонные асимптоты. Имеем:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\frac{1}{x}+\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctg\frac{1}{x}}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}arctg\frac{1}{x}=0.$$

По теореме 20 $y=\frac{x}{2}$ – правосторонняя наклонная асимптота. Легко видеть, что эта асимптота является и левосторонней.



□

ЧАСТЬ 2: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Лекция 10

Интервалы выпуклости и точки перегиба

Определение 19. Пусть *J* – некоторый интервал на действительной прямой. Говорят, что функция $y=f(x)$ выпукла вниз (соответственно, строго выпукла вниз) на *J*, если $\forall x_1, x_2 \in J$, таких, что $x_1<x_2$, выполняется неравенство:

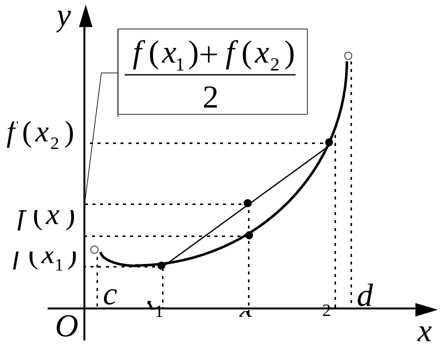
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ (соотв., } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\text{).} \qquad (32)$$

Если неравенства в (32) заменить на противоположные, то получаем определение выпуклой вверх (соотв., строго выпуклой вверх) функции.

□

Теорема 22 (критерий выпуклости). Пусть функция $y=f(x)$ дважды дифференцируема на открытом интервале (c,d). Эта функция выпукла вниз (соотв., выпукла вверх) тогда и только тогда, когда $\forall x\in(c,d)$ $f''(x)\ge 0$ (соотв., $f''(x)\le 0$).

Доказательство. Докажем теорему для функций, выпуклых вниз.



Предположим, что $\forall x\in(c,d)$ $f''(x)\ge 0$ и пусть $x_1,x_2\in(c,d),\ x_1<x_2,\ \tilde{x}=\frac{x_1+x_2}{2}$. Имеем:

$$f(\tilde{x})-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\left[f(\tilde{x})-f(x_1)\right]-\left[f(x_2)-f(\tilde{x})\right]}{2}.$$

Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема на (c,d), то по лемме 3 она непрерывна на (c,d). Поэтому на отрезке $\left[x_1,\tilde{x}\right]$ выполнены все условия теоремы Лагранжа (см. теорему 15), из которой следует существование точки $a_1\in(x_1,\tilde{x})$, такой, что $f(\tilde{x})-f(x_1)=f'(a_1)\cdot(\tilde{x}-x_1)$. Аналогично рассуждая, получаем: $f(x_2)-f(\tilde{x})=f'(a_2)\cdot(x_2-\tilde{x}),\ a_2\in(\tilde{x},x_2)$. Учитывая, что $\tilde{x}-x_1=x_2-\tilde{x}=\frac{x_2-x_1}{2}$, имеем:

$$f(\tilde{x})-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{f'(a_1)\cdot(\tilde{x}-x_1)-f'(a_2)\cdot(x_2-\tilde{x})}{2}=-\frac{x_2-x_1}{4}\cdot\left[f'(a_2)-f'(a_1)\right].$$

Из условий теоремы и из леммы 3 так же, как и ранее, следует, что функция $y'=f'(x)$ на отрезке $\left[a_1,a_2\right]$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Поэтому существует точка $\xi\in(a_1,a_2)$, такая, что $f'(a_2)-f'(a_1)=f''(\xi)\cdot(a_2-a_1)$. Итак, мы получаем равенство:

$$f(\tilde{x})-\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=-\frac{x_2-x_1}{4}\cdot f''(\xi)\cdot(a_2-a_1).$$

Так как по условию $f''(\xi)\ge 0$, то правая часть этого равенства неположительна, следовательно $f(\tilde{x})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, что в соответствии с определением 19 доказывает выпуклость вниз функции $y=f(x)$.

Перед рассмотрением обратного утверждения заметим, что если в начале полученного доказательства предположить, что $\forall x \in (c,d)\ f''(x) > 0$, то проведенное рассуждение даст строгую выпуклость вниз функции $y = f(x)$.

Обратное утверждение теоремы докажем лишь при условии, что функция $y'' = f''(x)$ непрерывна на (c,d) (без этого предположения доказательство значительно сложнее). Итак, пусть $y = f(x)$ выпукла вниз на (c,d), но существует точка $a \in (c,d)$, такая, что $f''(a) < 0$. Из непрерывности в точке a функции $y'' = f''(x)$ следует, что существует такая δ-окрестность этой точки, что $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)\ f''(x) < 0$ (докажите это от противного!). Поэтому из замечания, сделанного после доказательства первой части теоремы и примененного к выпуклым вверх функциям, получаем, что функция $y = f(x)$ строго выпукла вверх на интервале $(a-\delta, a+\delta)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

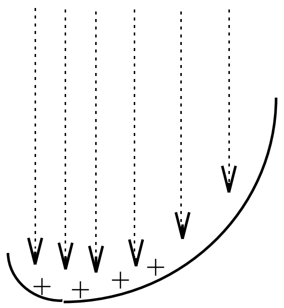
□

Пример 31. Рассмотрим функцию $y = f(x) = x^4$. Так как $\forall x \in (-\infty, +\infty)\ f''(x) = 12x^2 \geq 0$, то из теоремы 22 следует, что эта функция выпукла вниз на всей действительной прямой. Легко видеть, что на самом деле $y = x^4$ строго выпукла вниз на $(-\infty, +\infty)$ (докажите это!). При этом, однако, $f''(0) = 0$. □

Пример 31 показывает, что в полном объеме аналог теоремы 22 не может быть сформулирован для строго выпуклых функций. Однако справедлива следующая теорема, доказательство которой дословно повторяет первую часть доказательства теоремы 22.

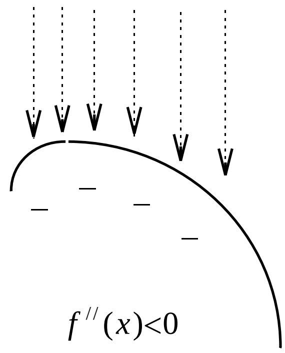
Теорема 23. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на открытом интервале (c,d). Если $\forall x \in (c,d)\ f''(x) > 0$, (соотв., $f''(x) < 0$), то $y = f(x)$ строго выпукла вниз (соотв., строго выпукла вверх) на (c,d). □

Для запоминания теорем 22 и 23 существует мнемоническое "правило дождя":



$f''(x) > 0$

Положительный знак второй производной соответствует скоплению дождя в сосуде (выпуклость вниз)

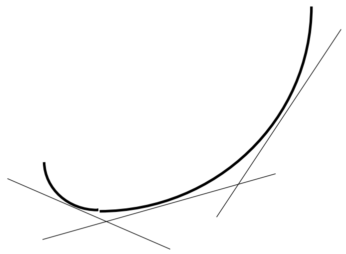


$f''(x) < 0$

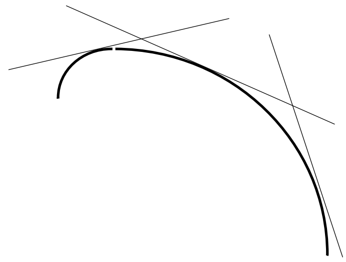
Отрицательный знак второй производной соответствует непопаданию дождя в сосуд (выпуклость вверх)

Следующая теорема, доказательство которой подобно доказательству теоремы 22 и поэтому нами опускается, дает характеризацию интервалов выпуклости в терминах касательных.

Теорема 24. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на открытом интервале (c,d). Она выпукла вниз (соотв., выпукла вверх) на этом интервале тогда и только тогда, когда $\forall x \in (c,d)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше (соотв, ниже) касательной к этому графику, проведенной в точке $(x, f(x))$.

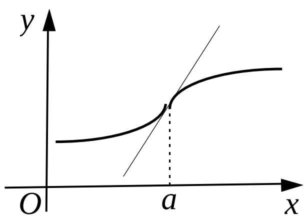


Касательные лежат ниже кривой
(выпуклость вниз)



Касательные лежат выше кривой
(выпуклость вверх)

□



$x = a$ – точка перегиба

<u>*Определение 20.*</u> Говорят, что точка $x = a$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, если эта функция определена в некоторой окрестности точки a, имеет касательную в этой точке и при переходе через эту точку меняет выпуклость вниз на выпуклость вверх или наоборот.

□

<u>*Теорема 25*</u> (необходимое условие точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки $x = a$ и эта точка является точкой перегиба графика данной функции, то $f^{//}(a) = 0$.

<u>*Доказательство.*</u> Предположим для определенности, что слева от точки a лежит интервал выпуклости вниз функции $y = f(x)$, а справа – интервал выпуклости вверх. Используя теорему 22, заключаем, что $f^{//}(x) \geq 0$ слева от a и $f^{//}(x) \leq 0$ справа от a. Применяя к функции $y^{/} = f^{/}(x)$ достаточный признак экстремума (см. теорему 18), заключаем, что в точке $x = a$ эта функция имеет локальный максимум. По теореме Ферма (теорема 12) $f^{//}(a) = 0$.

□

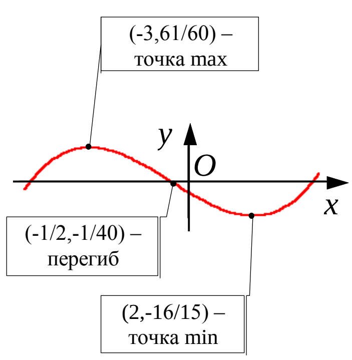
<u>*Теорема 26*</u> (достаточные условия точки перегиба). Пусть в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ имеет касательную, а в окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки) – дважды дифференцируема. Если при переходе через точку $x = a$ вторая производная $f^{//}(x)$ меняет знак, то $x = a$ – точка перегиба графика функции $y = f(x)$.

<u>*Доказательство*</u> немедленно следует из теоремы 22 и определения 20.

□

<u>*Пример 32*</u> (продолжение примеров 21 и 26). Найдем вторую производную исследуемой функции: $y^{//} = \frac{1}{10} \cdot (2x + 1)$. Так как $y^{//} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, то это единственная точка, "подозрительная" на перегиб. Заполняем таблицу для второй производной, наносим на график точки перегиба и уточняем поведение графика в смысле выпуклости:

x	$(-\infty, -1/2)$	$-1/2$	$(-1/2, +\infty)$
y''	–	0	+
y		$-1/40$	
		перегиб	

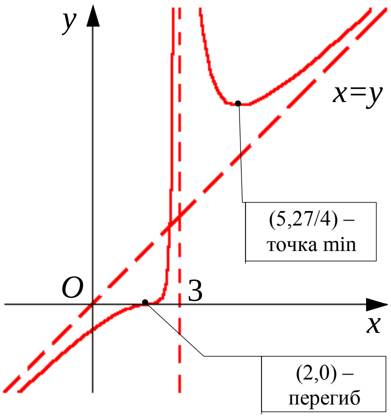


Пример 33 (продолжение примеров 22 и 27). Имеем:

$$y'' = \frac{\left[2(x-2)(x-5)+(x-2)^2\right](x-3)^3-(x-2)^2(x-5)\cdot 3(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{(x-2)(x-3)^2\left[3(x-4)(x-3)-3(x-2)(x-5)\right]}{(x-3)^6} =$$

$$= \frac{3(x-2)(x^2-7x+12-x^2+7x-10)}{(x-3)^4} = \frac{6(x-2)}{(x-3)^4}.$$

Так как $y''=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, то $x=2$ – единственная точка, подозрительная на перегиб. Строим таблицу и уточняем график. Заметим, что в таблицу для второй производной не следует вносить стационарные точки, не являющиеся подозрительными на перегиб (в данном случае речь идет о точке $x=5$).



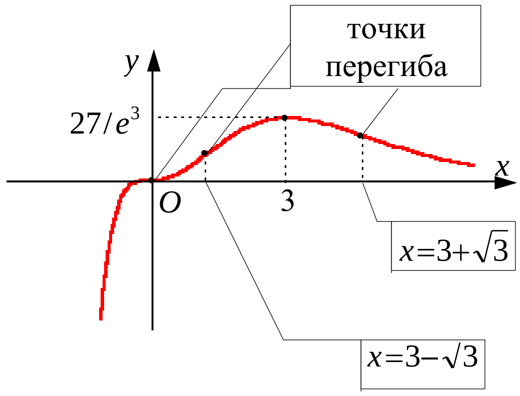
x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	$(3,+\infty)$
y''	–	0	+	+
y		0		
		перегиб		

Пример 34 (продолжение примеров 23 и 28). Имеем:

$$y''=-e^{-x}x^2(3-x)+e^{-x}2x(3-x)-e^{-x}x^2=e^{-x}x(-3x+x^2+6-2x-x)=e^{-x}x(x^2-6x+6).$$

Далее: $y''=0 \Leftrightarrow x(x^2-6x+6)=0 \Leftrightarrow x_1=0, x_{2,3}=3\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x_1=0, x_2=3-\sqrt{3}, x_3=3+\sqrt{3}$. Получили три точки, подозрительные на перегиб.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3},+\infty)$
y''	–	0	+	0	–	0	+
y		0		$\approx 0{,}57$		$\approx 0{,}93$	
		пер		пер		пер	



□

Читателю предлагается самостоятельно исследовать на выпуклость функции из примеров 24 (см. также пример 29) и 25 (см. также пример 30).

ЧАСТЬ 2: ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Лекция 11

Функции двух переменных

В этой лекции мы дадим краткий обзор основных понятий математического анализа, связанных с функциями двух переменных. Почти все, что будет изложено, без существенных изменений может быть перенесено на функции *n* переменных.

Пусть дана функция $z=z(x,y)$ двух независимых переменных *x* и *y*, определенная в некоторой области[1] из R^2. Зафиксируем точку $M_0(x_0,y_0)$ и пусть $\{M_n(x_n,y_n)\}$ – произвольная последовательность точек, строго стремящаяся к M_0 (это означает, что $\rho\left(M_n,M_0\right)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\xrightarrow{n\to\infty}0$ и $M_n\neq M_0$ $\forall n=1,2,\ldots$). Число *b* (конечное или бесконечное) называется пределом функции $z=z(x,y)$ при $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$, если для любой последовательности $\{M_n(x_n,y_n)\}$, строго стремящейся к M_0, выполняется соотношение: $\lim\limits_{n\to\infty} z(x_n,y_n)=b$. Тот факт, что число *b* является пределом функции $z=z(x,y)$ при $M\to M_0$, обозначают так: $\lim\limits_{M\to M_0} z(x,y)=b$. Все свойства 1–8, сформулированные для предела функции одной переменной (см. Часть 1, Свойства предела функции), остаются справедливыми и для функции двух переменных. Функция $z=z(x,y)$ называется непрерывной в точке M_0, если выполняется равенство: $\lim\limits_{M\to M_0} z(x,y)=z(x_0,y_0)$. Функция $z=z(x,y)$ называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна во всех точках этого множества. Все свойства непрерывности 1–6, сформулированные для функции одной переменной (см. Часть 1, Свойства непрерывных функций), также остаются справедливыми и для функции двух переменных.

Остановимся более подробно на теории дифференцирования функций двух переменных. Здесь основная идея такова. Для того, чтобы функцию двух переменных свести к функции одной переменной, одну из переменных (то есть *x* или *y*) фиксируют (считают постоянной величиной), а производную вычисляют по другой переменной. Если зафиксирована переменная *y* (то есть $y=const$), то производная по оставшейся переменной *x* обозначается $z_x^{/}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и называется частной производной функции $z=z(x,y)$ по переменной *x*. Точно так же, если зафиксирована переменная *x* (то есть $x=const$), то производная по оставшейся переменной *y* обозначается $z_y^{/}$ или $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и называется частной производной функции $z=z(x,y)$ по переменной *y*.

<u>*Пример 35.*</u> Пусть $z=3x^2y^5+7x^4-9y^3+\dfrac{x}{y}$. Найдем частные производные этой функции. Сначала зафиксируем переменную *y*, то есть пусть $y=const$. Тогда в первом члене функции *z* множитель $3y^5$ является постоянным и может быть вынесен за знак производной. Точно так же в последнем члене множитель $\dfrac{1}{y}$ является постоянным и также может быть вынесен за знак производной. Третий член является постоянной величиной и поэтому производная от него равна нулю. В итоге получаем:

---

[1] Под областью в R^2 понимается множество, содержащее вместе с каждой своей точкой некоторый круг с центром в данной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3y^5\cdot 2x+28x^3-0+\frac{1}{y}=6xy^5+28x^3+\frac{1}{y}.$$

Теперь зафиксируем переменную *x*, то есть пусть $x=const$. Тогда в первом члене функции *z* множитель $3x^2$ является постоянным и может быть вынесен за знак производной. Точно так же в последнем члене множитель x является постоянным и также может быть вынесен за знак производной. Второй член является постоянной величиной и поэтому производная от него равна нулю. Получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3x^2\cdot 5y^4+0-27y^2-\frac{x}{y^2}=15x^2y^4-27y^2-\frac{x}{y^2}.$$ □

<u>*Пример 36.*</u> Вычислим частные производные функции $z=ctg^3\frac{2x-3y}{x^2+y^3}$. Пусть сначала $y=const$. Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}}\right)\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\right)_x^/=3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}}\right)\cdot\frac{2(x^2+y^3)-(2x-3y)\cdot 2x}{(x^2+y^3)^2}=$$

$$=-3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\sin^{-2}\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\frac{2x^2+2y^3-4x^2+6xy}{(x^2+y^3)^2}=-6ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\sin^{-2}\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\frac{y^3-x^2+3xy}{(x^2+y^3)^2}.$$

Точно так же, считая, что $x=const$, получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}}\right)\cdot\left(\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\right)_y^/=3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}}\right)\cdot\frac{-3(x^2+y^3)-(2x-3y)\cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2}=$$

$$=-3ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\sin^{-2}\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\frac{-3x^2-3y^3-6xy^2+9y^3}{(x^2+y^3)^2}=-9ctg^2\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\sin^{-2}\frac{2x-3y}{x^2+y^3}\cdot\frac{2y^3-2xy^2-x^2}{(x^2+y^3)^2}$$

□

<u>*Пример 37.*</u> Вычислим частные производные функции $z=(\cos x)^{\ln(y^3+2)}$. При условии $y=const$ показатель данной функции постоянен, следовательно данную функцию нужно дифференцировать как степенную функцию (где $\alpha=\ln(y^3+2)$; см. Вводная лекцию, Таблица производных элементарных функций). Имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(y^3+2)\cdot(\cos x)^{\ln(y^3+2)-1}\cdot(-\sin x)=-\ln(y^3+2)\cdot\sin x\cdot(\cos x)^{\ln(y^3+2)-1}.$$

Наоборот, если $x=const$, то основание исходной функции постоянно, следовательно данную функцию нужно дифференцировать как показательную функцию (где $a=\cos x$; см. Вводная лекцию, Таблица производных элементарных функций). Получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\cos x)^{\ln(y^3+2)}\cdot\ln(\cos x)\cdot\frac{1}{y^3+2}\cdot 3y^2=\frac{3y^2\cdot\ln(\cos x)}{y^3+2}\cdot(\cos x)^{\ln(y^3+2)}.$$ □

Дадим теперь более формальное определение частных производных.

<u>*Определение 21.*</u> Частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ функции $z=z(x,y)$, вычисленные в точке $M(x,y)$, определяются формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(x+\Delta x,y)-z(x,y)}{\Delta x},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(x,y+\Delta y)-z(x,y)}{\Delta y}. \tag{33}$$

□

Легко видеть, что эти формулы в точности соответствуют описанной выше процедуре нахождения частных производных. Правила дифференцирования 1–5, записанные нами для функции одного переменного (см. Вводная лекция, Правила дифференцирования), полностью сохраняются и для функций двух переменных. Видоизменяется только цепное правило. Перед тем, как сформулировать соответствующий результат, заметим, что после вычисления частных производных те переменные, которые перед дифференцированием были "заморожены", "размораживаются" и, таким образом, функции $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ опять можно рассматривать как функции двух переменных.

Теорема 27. (цепное правило для функции двух переменных). Предположим, что функция $z=z(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ и $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

1) Если внутрь функции $z=z(x,y)$ вставить дифференцируемые функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$, то сложная функция $z(t)=z\big(x(t),y(t)\big)$ будет дифференцируема и ее производная вычисляется по формуле:

$$z'(t)=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot y'(t). \tag{34}$$

2) Если внутрь функции $z=z(x,y)$ вставить функции $x=x(u,v)$ и $y=y(u,v)$, обладающие частными производными, то сложная функция $z(u,v)=z\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ также будет иметь частные производные, вычисляемые по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{35}$$

□

Определение 22. Частные производные второго порядка функции $z=z(x,y)$ определяются формулами:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{36}$$

Последние две производные называются смешанными частными производными.

□

Пример 38 (продолжение примера 35). Имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=6y^5+84x^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=60x^2y^3-54y+\frac{2x}{y^3},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=30xy^4-\frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=30xy^4-\frac{1}{y^2}.$$

□

В примере 38 мы получили совпадение смешанных производных второго порядка. О закономерности такого результата говорит следующая

Теорема 28. Пусть функция $z=z(x,y)$ обладает непрерывными смешанными производными $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$. Тогда $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

□

Определение 23. Пусть $\bar e^0=\begin{pmatrix} e_1^0 \\ e_2^0\end{pmatrix}$ – единичный вектор (см. ЛЛААГ, определение 21) и пусть $z(x+te_1^0,y+te_2^0)-z(x,y)$ есть приращение функции $z=z(x,y)$ в направлении вектора $\bar e^0$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{z(x+te_1^0,y+te_2^0)-z(x,y)}{t}$, то этот предел называется производной функции $z=z(x,y)$ в направлении вектора $\bar{e}^0$ и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial e}\left(x,y\right)$.

□

Сравнивая определение 23 с определением 21, видим, что при $\bar{e}^0=\bar{i}$ (то есть когда вектор $\bar{e}^0$ имеет направление оси *Ox*) $\dfrac{\partial z}{\partial e}\left(x,y\right)=\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x,y\right)$, а при $\bar{e}^0=\bar{j}$ (то есть когда вектор $\bar{e}^0$ имеет направление оси *Oy*) $\dfrac{\partial z}{\partial e}\left(x,y\right)=\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x,y\right)$.

<u>*Теорема 29.*</u> Пусть функция $z=z(x,y)$ определена в области, содержащей точку $M_0(x_0,y_0)$, и имеет в этой области непрерывные частные производные. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial e}\left(x_0,y_0\right)=\left(gradz(x_0,y_0)\right)\cdot\bar{e}^0=e_1^0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)+e_2^0\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right), \tag{37}$$

где $gradz(x_0,y_0):=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)\end{pmatrix}$ – вектор, называемый градиентом функции $z=z(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

<u>*Доказательство.*</u> Обозначим $z(t)=z(x_0+te_1^0,y_0+te_2^0)$. Из определения 23 легко следует, что $\dfrac{\partial z}{\partial e}\left(x_0,y_0\right)=z'(t)\Big|_{t=0}$. Применяя формулу (34), получаем:

$$z'(t)=\frac{\partial z}{\partial x}\left(x_0+e_1^0t,y_0+e_2^0t\right)\cdot(x_0+e_1^0t)'_t+\frac{\partial z}{\partial y}\left(x_0+e_1^0t,y_0+e_2^0t\right)\cdot(y_0+e_2^0t)'_t=$$

$$=e_1^0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\left(x_0+e_1^0t,y_0+e_2^0t\right)+e_2^0\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\left(x_0+e_1^0t,y_0+e_2^0t\right).$$

Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial e}\left(x_0,y_0\right)=z'(t)\Big|_{t=0}==e_1^0\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)+e_2^0\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)$. □

<u>*Пример 39.*</u> Найдем $gradz$ и $\dfrac{\partial z}{\partial e}$ в точке $M_0(3,2)$ по направлению вектора $\bar{e}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, если $z=2x^2y-3xy^3$. Сначала вычисляем частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=4xy-3y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2-9xy^2$. Следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(3,2)=4\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2^3=24-24=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2\cdot 3^2-9\cdot 3\cdot 2^2=18-108=-90$. То есть $gradz(3,2)=\begin{pmatrix}0\\-90\end{pmatrix}$. Далее, пронормируем вектор $\bar{e}$, то есть запишем вектор $\bar{e}^0$, имеющий единичную длину и направление, совпадающее с направлением вектора $\bar{e}$ (см. ЛЛААГ, пример 14): $\|\bar{e}\|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$, $\bar{e}^0=\dfrac{\bar{e}}{\|\bar{e}\|}=\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}$. По формуле (37):

$$\frac{\partial z}{\partial e}(3,2)=\begin{pmatrix}0\\-90\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3/5\\4/5\end{pmatrix}=0\cdot(-3/5)-90\cdot(4/5)=-72.$$

□