МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Ростовский государственный строительный университет

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Курс лекций
и
образец решения индивидуального задания

Ростов-на-Дону
2007

УДК 517(07)

Числовые и функциональные ряды (Курс лекций и образец решения индивидуального задания). – Ростов-на-Дону: Ростовский государственный строительный университет, 2007. – 48 с.

Изложен курс лекций по теории рядов (числовые ряды, степенные ряды, ряды Фурье), снабженный многочисленными решенными примерами. Приведен образец решения индивидуального задания.

Методическое пособие предназначено для студентов очной формы, проходящих обучение на кафедре высшей математики РГСУ, а также на математических кафедрах других вузов.

Составители: д.ф.-м.н., проф. И.В.Павлов
к.ф.-м.н., доц. Т.А. Волосатова

Рецензенты: к.ф.-м.н., доц. А.М. Можаев
к.ф.-м.н., доц. Г.А. Власков

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 1: ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекция 1

Определение ряда и его суммы

Нестрого говоря, числовой ряд – это бесконечная сумма чисел.

Пример 1. Выражение вида $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ldots$ есть числовой ряд. Составим так называемые частные суммы этого ряда:

$S_1=1;$

$S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$

$S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4};$

....

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

(при подсчете S_n мы использовали известную из школьного курса формулу суммы n членов геометрической прогрессии).

Естественно попытаться в выражении для S_n перейти к пределу при $n\to\infty$. Интуитивно ясно, что в этом случае сумма S_n будет "приближаться" к выписанной в условии примера бесконечной сумме, которую мы обозначим через S. Имеем:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2-0=2\,.$$

Теперь, руководствуясь интуитивными соображениями, изложенными в примере 1, дадим строгое определение числового ряда и его суммы.

Определение 1. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – действительные числа. Выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

называется числовым рядом с общим членом u_n и частными суммами

$S_1=u_1;$

$S_2=u_1+u_2;$

$S_3=u_1+u_2+u_3;$

....

$S_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n;$

....

Ряд (1) называется сходящимся, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. В этом случае число $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется суммой ряда. Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует (или равен бесконечности), то ряд (1) называется расходящимся.

В примере (1) мы рассмотрели сходящийся ряд с суммой $S=2$.

Пример 2. Рассмотрим ряд: $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$. Вычислим его частные суммы:

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ S_5=1,\ S_6=0,\ldots,S_{2n-1}=1,\ S_{2n}=0,\ldots$$

Ясно, что полученная последовательность частных сумм предела не имеет. Поэтому данный ряд расходится.

Пример 3 (обобщение примера 1). Пусть $q\in R$. Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с частным q:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}+\ldots.$$

Рассуждая точно так же, как в примере 1, легко показать, что при $|q|<1$ данный ряд сходится и имеет сумму $S=\dfrac{1}{1-q}$. Если же $|q|\geq 1$, то из последующей теоремы 1 выводится, что данный ряд является расходящимся. Читателю предлагается провести все необходимые выкладки.

Теорема 1 (**необходимый признак сходимости ряда**). Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

Доказательство. Имеем:

$S_{n-1}=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}$;

$S_n=u_1+u_2+\ldots+u_{n-1}+u_n$.

Вычитая из второго равенства первое, получаем $u_n=S_n-S_{n-1}$ и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_n-S_{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

На практике теорему 1 чаще всего используют в следующем виде (**достаточный признак расходимости ряда**):

<u>если предел общего члена ряда (1) неравен нулю либо не существует, то ряд (1) расходится</u>.

Действительно, если бы ряд (1) сходился, то предел его общего члена был бы равен нулю.

Пример 4. Ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ расходится, так как при всех n $u_n=1$ и, следовательно,. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=1\neq 0$. Ряд из примера 2 также расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ не существует.

Заметим, что если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то из этого, вообще говоря, не следует, что ряд (1) сходится.

Пример 5. Рассмотрим ряд, называемый гармоническим рядом:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots .$$

Здесь $u_n = \frac{1}{n}$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Однако в дальнейшем будет доказано, что данный ряд расходится.

Теорема 2. Пусть $c, \tilde{c} \in R$. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$ сходятся и их суммы соответственно равны S и $\tilde{S}$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(c\cdot u_n + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_n\right)$ также сходится и его сумма T равна

$c\cdot S + \tilde{c}\cdot\tilde{S}$, то есть справедлива формула:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(c\cdot u_n + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_n\right) = c\cdot\sum_{n=1}^{\infty} u_n + \tilde{c}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{u}_n .$$

Доказательство. Обозначим через S_n и $\tilde{S}_n$ частные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$, а через T_n – частную сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(c\cdot u_n + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_n\right)$. Имеем:

$$T_n = \left(c\cdot u_1 + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_1\right) + \left(c\cdot u_2 + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_2\right) + \ldots + \left(c\cdot u_n + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_n\right) = \left(c\cdot u_1 + c\cdot u_2 + \ldots + c\cdot u_n\right) + \left(\tilde{c}\cdot\tilde{u}_1 + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_2 + \ldots + \tilde{c}\cdot\tilde{u}_n\right) =$$
$$= c\cdot\left(u_1 + u_2 + \ldots + u_n\right) + \tilde{c}\cdot\left(\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \ldots + \tilde{u}_n\right) = c\cdot S_n + \tilde{c}\cdot\tilde{S}_n .$$

Поэтому

$$T = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\left(c\cdot S_n + \tilde{c}\cdot\tilde{S}_n\right) = c\cdot\lim_{n\to\infty} S_n + \tilde{c}\cdot\lim_{n\to\infty}\tilde{S}_n = c\cdot S + \tilde{c}\cdot\tilde{S} .$$

Из теоремы 2 легко вытекают следующие утверждения:

1) если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же действительное число, то полученный ряд также будет сходится;

2) сумма и разность двух сходящихся рядов есть сходящиеся ряды;

3) если сумма или разность двух рядов есть ряд сходящийся и один из этих рядов сходится, то сходится и второй ряд.

Читателю предлагается доказать эти утверждения.

Определение 2. Остатком ряда (1) называется ряд:

$$R_N = u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots .$$

Таким образом, формально можно записать:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots = S_N + R_N .$$

Лемма 1. Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда остаток этого ряда сходится.

<u>Доказательство.</u> Обозначим частные суммы остатка R_N ряда (1) через $\tilde{S}_n$. Имеем:

$$\tilde{S}_n = u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots + u_{N+n} = S_{N+n} - S_N .$$

Заметим, что здесь N – число фиксированное, а n изменяется от единицы до бесконечности. Таким образом, S_N есть константа. Следовательно, если существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} S_{N+n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{N+n} - S_N$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$ также существует и конечен. Обратно, если существует и конечен $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} S_{N+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n + S_N$ существует и конечен. Отсюда вытекают утверждения леммы.

Мы будем часто пользоваться леммой 1, так как она дает возможность отбрасывать при необходимости любое конечное число членов ряда и работать только с остатком ряда. Определив, сходится или расходится остаток, мы немедленно получаем соответствующие заключения и о самом ряде.

Ряды с положительными членами

Займемся более подробно изучением рядов с положительными членами. Общие члены таких рядов мы будем обозначать буквами a_n и b_n. Сначала мы сформулируем без доказательства ряд признаков сходимости для таких рядов и рассмотрим примеры применения этих признаков, а затем приведем все необходимые доказательства.

Пусть дан ряд:

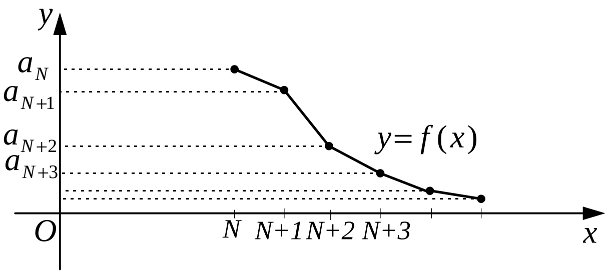
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots , \tag{2}$$

все члены которого положительны. Очевидно, что частные суммы этого ряда монотонно возрастают, то есть $S_1 \le S_2 \le S_3 \le \ldots \le S_n \le \ldots$. Как известно из теории пределов, в этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ всегда существует, но следует различать два случая:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n < \infty$ и ряд (2) сходится (см. пример 1);
2) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ и ряд (2) расходится (см. пример 4, где $S_n = n$).

Это простое замечание мы будем часто использовать в доказательствах признаков сходимости.

Прежде всего сформулируем так называемый интегральный признак сходимости ряда. Мы будем предполагать, что члены ряда (2) монотонно убывают, начиная с некоторого номера N, то есть $a_N \ge a_{N+1} \ge a_{N+2} \ge \ldots$. Всегда существует такая монотонно убывающая на интервале $[N, \infty)$ функция $f(x)$, что $f(N) = a_N$, $f(N+1) = a_{N+1}$, $f(N+2) = a_{N+2}, \ldots$. Например, функцию $f(x)$ можно построить так, как показано на рисунке:



Обычно аналитический вид общего члена a_n уже автоматически доставляет вид функции $f(x)$. Например, если $a_n=\frac{1}{n\cdot\ln(n+1)}$, то $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(x+1)}$. В дальнейшем, чтобы не загружать обозначения, мы вместо $f(x)$ будем продолжать писать a_n, считая, что если $n=x$, то $a_n=f(x)$.

<u>Теорема 3</u> (**интегральный признак Коши**). Пусть существует такой номер *N*, что $a_N \ge a_{N+1} \ge a_{N+2} \ge \ldots$.

Если $\int_N^\infty a_n dn<\infty$, то ряд (2) сходится.

Если $\int_N^\infty a_n dn=\infty$, то ряд (2) расходится.

<u>Пример 6.</u> Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. Здесь $a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ и ясно, что общий член монотонно убывает. Имеем:

$$\int_1^\infty a_n dn=\int_1^\infty \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)}=\left|\begin{array}{c} t=\ln(n+1), \\ dt=\dfrac{dn}{n+1}, \\ n=1\to t=\ln 2,\ n=\infty\to t=\infty \end{array}\right|=\int_{\ln 2}^\infty \frac{dt}{t}=\ln t\Big|_{\ln 2}^{\infty}=\infty.$$

Данный ряд расходится по интегральному признаку Коши.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 1: ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекция 2

Следующий пример является одним из важнейших в теории числовых рядов.

<u>Пример 7</u>. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots, \tag{3}$$

где *p* – некоторое действительное число. Этот ряд называется ***p*-гармоническим рядом**. Исследуем его на сходимость при различных значениях параметра *p*.

Очевидно, что если $p \le 0$, то общий член данного ряда монотонно возрастает и, таким образом, не может стремиться к нулю, то есть ряд расходится по достаточному признаку расходимости (см. теорему 1).

Предположим теперь, что $p > 0$. Применим интегральный признак Коши (см. теорему 3):

$$\int_1^\infty a_n dn = \int_1^\infty \frac{1}{n^p} dn = \int_1^\infty n^{-p} dn = \begin{cases} \left. \dfrac{n^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^\infty, \textit{если } p \ne 1; \\ \left. \ln n \right|_1^\infty, \textit{если } p = 1. \end{cases}$$

Если $0 < p < 1$, то $\int_1^\infty a_n dn = \left. \frac{1}{1-p} \cdot n^{1-p} \right|_1^\infty = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty$, следовательно, ряд расходится.

Если $p = 1$, то $\int_1^\infty a_n dn = \ln n|_1^\infty = \infty - 0 = \infty$, следовательно, опять ряд расходится.

Если $p > 1$, то $\int_1^\infty a_n dn = \left. \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{n^{p-1}} \right|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1} < \infty$, откуда следует, что ряд сходится.

Итак, мы получили следующую картину: **если $p \le 1$, то *p*-гармонический ряд (3) расходится; если же $p > 1$, то ряд (3) сходится.**

Теорема 4 (**признак Даламбера**). Предположим, что существует (конечный или бесконечный) предел

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Если $D < 1$, то ряд (2) сходится.

Если $D > 1$, то ряд (2) расходится.

Если $D = 1$, то ряд (2) в одних случаях может сходиться, а в других – расходиться.

Пример 8. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} ... + \frac{n}{2^n} + ...$$

Вычислим параметр *D*. Так как $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$, то:

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

(при вычислении предела была применена эквивалентность: $n+1 \sim n$ при $n \to \infty$). Так как $D < 1$, то ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 9. Исследуем на сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{3^n}{\ln n} = \frac{9}{\ln 2} + \frac{27}{\ln 3} + ... + \frac{3^n}{\ln n} + ...$$

Здесь $a_n = \frac{3^n}{\ln n}$, $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\ln(n+1)}$, поэтому:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot\ln n}{\ln(n+1)\cdot 3^n}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}.$$

Так как выражение под последним пределом представляет собой неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то для вычисления этого предела можно применить правило Лопиталя. Имеем:

$$D=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=3>1.$$

Ряд расходится по признаку Даламбера.

<u>Пример 10</u>. Рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots.$$

Так как $a_n=\frac{1}{n\ln n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, то

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=1\cdot 1=1$$

(вычисление последнего предела проведено в примере 9). Так как $D=1$, то в данном случае признак Даламбера не дает ответа о сходимости либо расходимости ряда! Однако точно так же, как в примере 6, доказывается, что данный ряд расходится по интегральному признаку Коши.

<u>Пример 11</u>. Попытаемся теперь применить признак Даламбера к ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}=\frac{1}{4\ln 2}+\frac{1}{9\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n^2\ln n}+\ldots.$$

Так как $a_n=\frac{1}{n^2\ln n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2\ln(n+1)}$, то

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\ln n}{(n+1)^2\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}\cdot 1=1\cdot 1=1$$

и признак Даламбера (как и в примере 10) ответа не дает.

Так как очевидно, что общий член a_n монотонно убывает, то можно применить интегральный признак Коши. Применяя свойство монотонности интеграла, имеем:

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{n^2\ln n}dn\le\int_2^{\infty}\frac{1}{n^2\ln 2}dn\le\frac{1}{\ln 2}\int_2^{\infty}n^{-2}dn=\frac{1}{\ln 2}\cdot\left.\frac{n^{-1}}{-1}\right|_2^{\infty}=-\frac{1}{\ln 2}\cdot\left.\frac{1}{n}\right|_2^{\infty}=0+\frac{1}{2\ln 2}=\frac{1}{2\ln 2}<\infty.$$

Таким образом, ряд сходится по интегральному признаку Коши.

<u>Теорема 5</u> (**радикальный признак Коши**). Предположим, что существует (конечный или бесконечный) предел

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}.$$

Если $C<1$, то ряд (2) сходится.

Если $C>1$, то ряд (2) расходится.

Если $C=1$, то ряд (2) в одних случаях может сходиться, а в других – расходиться.

Пример 12. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n}{n^n}$. Вычислим параметр C:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n2^n}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot 2}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}.$$

Из теории пределов известно, что $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, и очевидно, что $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$. Поэтому $C=0<1$ и ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Пример 13. Применим радикальный признак Коши к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n^2}}{n^n}$. Так как $a_n=\frac{5^{n^2}}{n^n}=\frac{\left(5^n\right)^n}{n^n}$, то

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot\ln 5}{1}=\infty>1.$$

Ряд расходится по радикальному признаку Коши.

Теорема 6 (**признак сравнения**). Пусть имеется ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=b_1+b_2+b_3+...+b_n+..., \tag{4}$$

относительно которого известно, сходится он или расходится.

Если, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $a_n\le b_n$, а ряд (4) сходится, то ряд (2) также сходится.

Если, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $a_n\ge b_n$, а ряд (4) расходится, то ряд (2) также расходится.

Пример 14. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$. Для оценки общего члена $a_n=\frac{\ln n}{n^3}$ применим хорошо известное неравенство: $\ln x\le x$ при $x>0$. Имеем:

$$a_n=\frac{\ln n}{n^3}\le\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}=b_n.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ является p-гармоническим рядом с $p=2>1$. В соответствие с исследованиями, проведенными в примере 7, этот ряд сходится. Следовательно и исходный ряд сходится по признаку сравнения.

Пример 15. Пусть дан ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Опять (как и в примере 14) используя неравенство $\ln x\le x$, получаем:

$$a_n=\frac{1}{\ln n}\ge\frac{1}{n}=b_n.$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ является гармоническим рядом (то есть он p-гармонический с $p=1$).

Из примера 7 следует, что этот ряд расходится. Значит, и исходный ряд расходится.

Теорема 7 (**признак эквивалентности**). Пусть $a_n\sim b_n$ при $n\to\infty$ (напомним, что это просто означает выполнение равенства $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$). Тогда ряды (2) и (4) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 16. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5n+7}{n^5+8n^4+6n^3-5}$. Применяя тот факт, что при стремлении аргумента к бесконечности многочлен эквивалентен своему члену с максимальной степенью, получаем:

$$a_n=\frac{n^2-5n+7}{n^5+8n^4+6n^3-5}\sim\frac{n^2}{n^5}=\frac{1}{n^3}=b_n.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как p-гармонический с $p=3>1$, то и исходный ряд сходится по признаку эквивалентности.

Пример 17. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^{\frac{3}{2}}+3n+1}$. Имеем:

$$a_n=\frac{n}{2n^{\frac{3}{2}}+3n+1}\sim\frac{n}{2n^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=b_n.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ расходится (он p-гармонический с $p=\frac{1}{2}\le1$), то из теоремы 2 легко следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ также расходится. Тогда по признаку эквивалентности исходный ряд также расходится.

Пример 18. Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^4+6}{n^4+5}$. Преобразуем выражение, стоящее под знаком логарифма, следующим образом:

$$\frac{n^4+6}{n^4+5}=\frac{\left(n^4+5\right)+1}{n^4+5}=\frac{n^4+5}{n^4+5}+\frac{1}{n^4+5}=1+\frac{1}{n^4+5}.$$

Следовательно,
$$\ln\frac{n^4+6}{n^4+5}=\ln\left(1+\frac{1}{n^4+5}\right)\sim\frac{1}{n^4+5}\sim\frac{1}{n^4}=b_n$$
(первая эквивалентность есть следствие известной из теории пределов эквивалентности $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$). Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ сходится, то и исходный ряд также сходится.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 1: ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Лекция 3

Ряды с произвольными членами

Вернемся к рассмотрению ряда (1), составленного из произвольных действительных чисел.

Теорема 8 (**признак абсолютной сходимости**). Если ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots, \tag{5}$$
составленный из модулей членов ряда (1), сходится, то ряд (1) также сходится.

Пример 19. Рассмотрим ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+\ldots.$$
и ряд, составленный из модулей членов этого ряда:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots.$$
Второй ряд сходится как p-гармонический с $p=2>1$. Значит и исходный ряд сходится по признаку абсолютной сходимости.

В примере 20 будет показано, что теорема, обратная теореме 8, неверна, то есть из сходимости ряда (1) **не следует** сходимость ряда (5).

Определение 3. Пусть дан ряд (1). Если построенный по нему ряд (5) сходится, то исходный ряд (1) называется абсолютно сходящимся.

Введем также следующее важное определение.

Определение 4. Пусть при любом $n=1,2,3,\ldots$ $a_n>0$. Ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n=a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots. \tag{6}$$

называется знакочередующимся рядом.

Знакочередующийся ряд был рассмотрен нами в примере 19.

<u>*Теорема 9*</u> (**признак Лейбница**). Если в знакочередующемся ряде (6) член a_n монотонно убывает к нулю, то ряд (6) сходится. Остаток этого ряда (см. определение 2)

$$R_N=(-1)^{N+2}a_{N+1}+(-1)^{N+3}a_{N+2}+...$$

имеет тот же знак, что и первый член остатка $(-1)^{N+2}a_{N+1}$ (этот член называют также первым отброшенным членом). Для остатка ряда справедлива оценка:

$$|R_N|<a_{N+1}.$$

Тот факт, что a_n монотонно убывает к нулю, кратко обозначают так: $a_n\downarrow 0$.

<u>*Пример 20*</u>. Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+....$$

Так как $a_n=\frac{1}{n}\downarrow 0$, то этот ряд сходится по признаку Лейбница.

Зададимся вопросом: начиная с какого N частные суммы данного ряда приближают его сумму S с точностью 0,01? Так как по теореме 9 $|R_{99}|<a_{100}=\frac{1}{100}$, а $R_{99}=S-S_{99}$, то $|S-S_{99}|<0{,}01$. Ясно также, что и при любом $N\geq 99$ выполняется неравенство $|S-S_N|<0{,}01$. Таким образом, искомый номер N равен 99.

Заметим также, что рассматриваемый ряд не является абсолютно сходящимся, так как ряд из его модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ расходится, будучи гармоническим рядом.

<u>*Определение 5*</u>. Числовой ряд называется условно сходящимся, если он сходится, но не является абсолютно сходящимся.

Таким образом, ряд из примера 20 является условно сходящимся.

ЧАСТЬ 2: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

В этом разделе мы сосредоточим внимание на рядах вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+..., \tag{7}$$

члены которых являются функциями действительной переменной x. Такие ряды называются функциональными рядами.

Важнейшим примером функциональных рядов являются так называемые степенные ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots, \tag{8}$$

то есть ряды, состоящие из степенных функций.

Область сходимости ряда

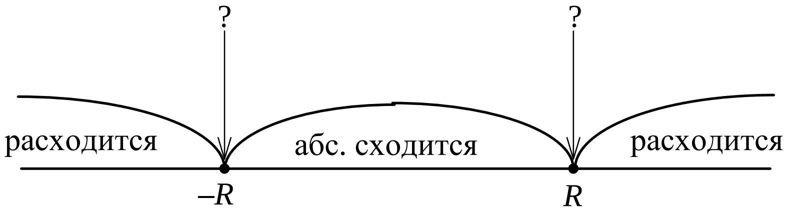
Определение 6. Множество на прямой, состоящее из тех значений x, для которых ряд (7) сходится, называется областью сходимости функционального ряда (7).

Теорема 10. Пусть коэффициенты c_n степенного ряда (8) таковы, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$, и обозначим $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда:

а) для любого $x \in (-R, R)$ ряд (8) абсолютно сходится;

б) для любого $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд (8) расходится;

с) для $x = -R$ и $x = R$ ряд (8) иногда сходится, а иногда расходится.



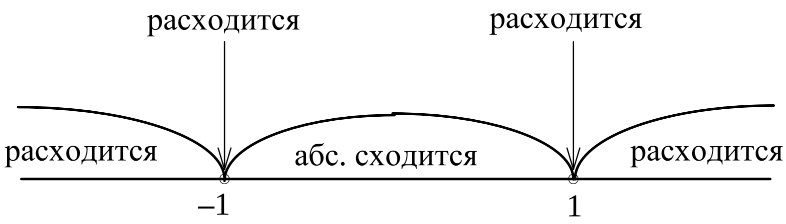
Определение 7. Число $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ называется радиусом сходимости степенного ряда (8), а интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости.

Пример 21. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots .$$

Здесь $c_n = (-1)^n, |c_n| = 1$ и $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Посмотрим, как ведет себя ряд в граничных точках интервала сходимости. При $x = -1$ получаем расходящийся ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$ (см. пример 4). При $x = 1$ данный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^n + \ldots$ и также расходится (см. пример 2). Таким образом, полная область сходимости исходного ряда есть интервал (-1,1):



Пример 22. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n+\ldots .$$

Здесь $c_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, |c_n|=\dfrac{1}{n}$ и $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (см. пример 12).

При $x=-1$ получаем ряд:

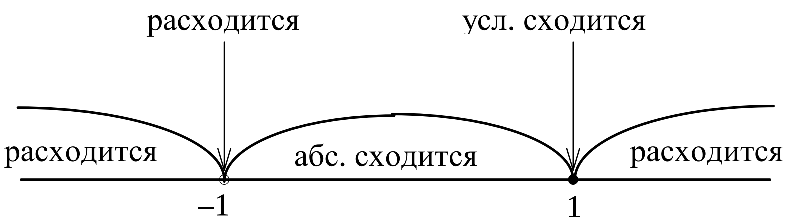
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(-1)^n=-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{n}\ldots=-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\ldots\right),$$

который расходится (см. примеры 5 и 7).

При $x=1$ исходный ряд принимает вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots .$$

Этот ряд условно сходится (см. пример 20). Мы получили полное описание области сходимости исходного ряда:



Пример 23. Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n^2}\cdot x^n$. Так как $|c_n|=c_n=\dfrac{2^n}{n^2}$, то

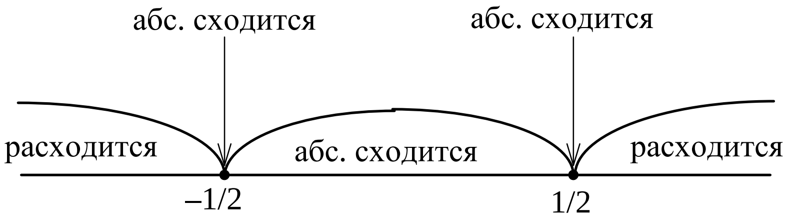
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}}=\frac{2}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^2}=\frac{2}{1}=2,$$

следовательно, $R=\dfrac{1}{2}$.

При $x=\dfrac{1}{2}$ исходный ряд превращается в 2-гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который сходится (см. пример 7).

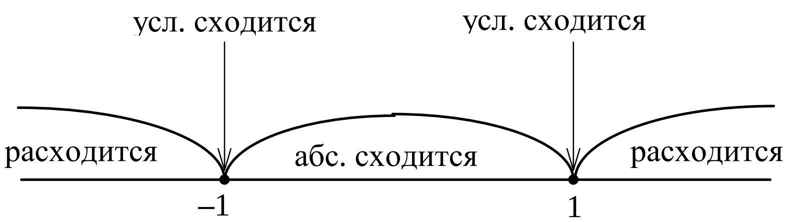
При $x=-\dfrac{1}{2}$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, который абсолютно сходится (см. пример 19).

Полная область сходимости исходного ряда хорошо видна на схеме:



Пример 24. Рассмотрим чуть более сложный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^{2n}$. Сначала сделаем замену переменных $y=x^2$. Наш ряд запишется в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot y^n$. Этот ряд мы исследовали в примере 22 и получили при $|y|<1$ абсолютную сходимость, а при $|y|>1$ расходимость. Следовательно, исходный ряд абсолютно сходится, если $|x^2|<1$, и расходится, если $|x^2|>1$. То есть он абсолютно сходится, если $|x|<1$, и расходится, если $|x|>1$. Отсюда следует, что число $R=1$ есть радиус сходимости исходного ряда.

Очевидно, при $x=1$ и $x=-1$ исходный ряд превращается в ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, который условно сходится (см. пример 22). Полностью область сходимости нашего ряда описывается схемой:



Читателю предлагается доказать, что примеры 21–24 описывают все возможные ситуации поведения степенного ряда (8) на концах интервала сходимости, а именно: ряд (8) может расходится на обоих концах; он может расходится на одном конце и условно сходится на другом; он может условно сходится на обоих концах, и, наконец, он может абсолютно сходится на обоих концах. (Для того, чтобы доказать это утверждение, достаточно установить, что если ряд абсолютно сходится на одном конце, то он обязательно будет абсолютно сходится и на другом конце).

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 2: ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Лекция 4

Теорема 11. Если коэффициенты c_n степенного ряда (8) таковы, что предел $\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ существует, то радиус сходимости этого ряда можно вычислять по формуле:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}. \tag{9}$$

В примере 25 нам понадобится обозначение факториала:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n, \quad 0! = 1. \tag{10}$$

<u>*Пример 25*</u>. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Здесь $|c_n| = c_n = \frac{1}{n!}$. Для нахождения радиуса сходимости данного ряда применим формулу (9). Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

То есть, $R = \frac{1}{0} = \infty$ и исходный ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой.

Мажорируемая сходимость функциональных рядов

<u>*Определение 8*</u>. Говорят, что функциональный ряд (7) имеет на множестве $X \subset R$ мажорируемую сходимость, если существует сходящийся ряд

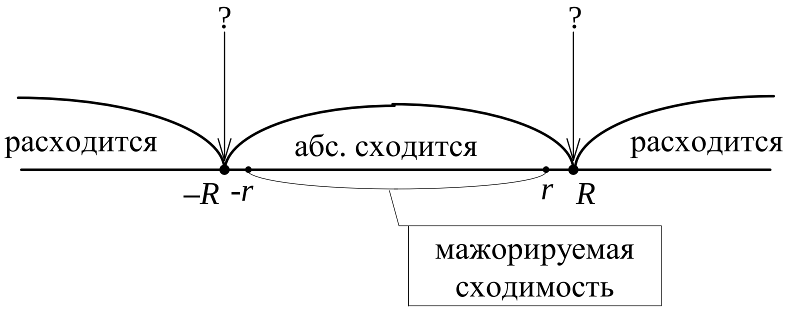
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{11}$$

с положительными членами, такой, что для всех $x \in X$ и для всех $n = 0,1,2,3,\ldots$ выполняется неравенство:

$$|u_n(x)| \le a_n. \tag{12}$$

Из признака абсолютной сходимости (см. теорему 8) следует, что если ряд (7) имеет на множестве X мажорируемую сходимость, то он абсолютно сходится в каждой точке $x \in X$.

<u>*Теорема 12*</u>. Пусть R – радиус сходимости степенного ряда (8), а число r таково, что $0 < r < R$. Тогда ряд (8) имеет на отрезке $[-r, r]$ мажорируемую сходимость.



Нетрудно построить пример, показывающий, что на интервале $(-R,R)$ ряд (8), вообще говоря, не имеет мажорируемой сходимости. Такими являются примеры 21 и 25 (докажите это!).

Интегрирование функциональных рядов

Теорема 13. Пусть ряд (7) состоит из непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций и имеет на этом отрезке мажорируемую сходимость. Тогда его сумма $S(x)$ также является непрерывной на $[a,b]$ функцией и справедливо равенство:

$$\int_a^b S(x)dx=\int_a^b\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx\ . \tag{13}$$

Теорема 13 говорит о том, что в случае мажорированной сходимости ряд (7) можно почленно интегрировать.

Следствие. Пусть R – радиус сходимости степенного ряда (8). Если для $x\in(-R,R)$ обозначить $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$, то для любого числа $t\in(-R,R)$ выполняется равенство:

$$\int_0^t S(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\cdot t^{n+1}\ . \tag{14}$$

Радиус сходимости степенного ряда, содержащегося в равенстве (14), также равен R.

Пример 26 (продолжение примера 21). Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ из примера 21 представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=-x$. Из результатов примера 3 следует, что для любого $x\in(-1,1)$ выполняется равенство:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\ .$$

Применим формулу (14):

$$\int_0^t\frac{dx}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot t^{n+1}\ .$$

Но по формуле Ньютона-Лейбница, $\int_0^t \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^t = \ln(1+t) - \ln 1 = \ln(1+t)$. В результате получаем, что для всех $t \in (-1,1)$ справедливо равенство:

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot t^{n+1} + \ldots . \qquad (15)$$

Дифференцирование функциональных рядов

Теорема 14. Пусть ряд (7) сходится в каждой точке интервала (a,b) к своей сумме $S(x)$, а члены $u_n(x)$ этого ряда непрерывно дифференцируемы на (a,b). Тогда

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots , \qquad (16)$$

если ряд в равенстве (16) обладает мажорированной сходимостью в некоторой окрестности точки $x \in (a,b)$.

Следствие. Пусть R – радиус сходимости степенного ряда (8). Если для $x \in (-R,R)$ обозначить $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, то выполняется равенство:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} . \qquad (17)$$

Радиус сходимости степенного ряда, содержащегося в равенстве (17), также равен R.

Пример 27 (продолжение примера 21 и 26). Как и в примере 26, записываем равенство:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , \quad x \in (-1,1) .$$

По следствию из теоремы 14 имеем:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^n x^{n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} x^{n-1} .$$

Последнее соотношение верно при $x \in (-1,1)$.

Разложение функции в степенной ряд

Сначала заметим, что из последних двух пунктов следует возможность дифференцирования и интегрирования степенного ряда любое конечное число раз.

<u>Теорема 15</u>. Если для функции $y=f(x)$ при $x\in(-r,r)$ справедливо равенство

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n, \tag{18}$$

то

$$c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{19}$$

<u>Пример 28</u>. Предположим, что $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$. Тогда по теореме 15

$$c_n=\frac{\left(e^x\right)^{(n)}\Big|_{x=0}}{n!}=\frac{e^x\Big|_{x=0}}{n!}=\frac{1}{n!},$$

то есть если функцию e^x можно представить в виде степенного ряда, то она имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$$

(это ряд из примера 25, имеющий радиус сходимости $R=\infty$). Однако мы еще не доказали, что на самом деле соотношение

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \tag{20}$$

справедливо.

<u>Теорема 16</u> (о разложении функции в степенной ряд). Пусть функция $y=f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-r,r)$ и существует постоянная $M>0$, такая, что для любых $x\in(-r,r)$ и $n=0,1,2,3,...$ выполняется неравенство:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M.$$

Тогда для любого $x\in(-r,r)$ справедливо разложение:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n.$$

<u>Пример 29</u> (продолжение примера 28). Если $f(x)=e^x$, то для любых $x\in(-r,r)$ и $n=0,1,2,3,...$ $\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le e^r=M$. По теореме 16 равенство (20) выполняется для любых $x\in(-r,r)$. Но так как $r>0$ произвольно, то равенство (20) выполняется для всех действительных *x*.

Из примеров 26 и 29 следует справедливость представлений

$$\boxed{\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot x^{n+1}+...,\ x\in(-1,1)} \qquad (21)$$

и

$$\boxed{e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...,\ x\in(-\infty,\infty)}. \qquad (22)$$

Совершенно аналогично получаются разложения

$$\boxed{\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+...,\ x\in(-\infty,\infty,)} \qquad (23)$$

и

$$\boxed{\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...,\ x\in(-\infty,\infty)}. \qquad (24)$$

Чуть сложнее доказываются разложения, справедливые при $x\in(-1,1)$:

$$\boxed{arctg\ \ x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...} \qquad (25)$$

и

$$\boxed{(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+...+\frac{m(m-1)\cdot...\cdot(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot n}x^n+...}. \qquad (26)$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 3: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Лекция 5

Доказательство признака сравнения (теорема 6)

Согласно лемме 1 вместо рядов (2) и (4) можно рассматривать их остатки $R_N=a_{N+1}+a_{N+2}+...+a_{N+k}+...$ и $Q_N=b_{N+1}+b_{N+2}+...+b_{N+k}+...$.

Докажем первую часть теоремы. Так как ряд Q_N сходится и для любого $k=1,2,...$ $a_{N+k}\le b_{N+k}$, то, обозначив через $\tilde{S}_k$ частные суммы ряда R_N, имеем:

$$\tilde{S}_k=a_{N+1}+a_{N+2}+...+a_{N+k}\le b_{N+1}+b_{N+2}+...+b_{N+k}\le Q_N<\infty.$$

Ввиду того, что последовательность $\tilde{S}_k$ монотонно возрастает и ограничена сверху, она имеет конечный предел $\tilde{S} = \lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k$. Следовательно, ряд R_N сходится. По лемме 1 ряд (2) также сходится.

Докажем вторую часть теоремы. Так как ряд Q_N расходится и для любого $k = 1,2,\ldots$ $a_{N+k} \geq b_{N+k}$, то:

$$\tilde{S}_k = a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} \geq b_{N+1} + b_{N+2} + \ldots + b_{N+k} \to \infty \text{ при } k \to \infty.$$

Поэтому $\lim_{k\to\infty} \tilde{S}_k = \infty$, то есть ряд R_N расходится. По лемме 1 ряд (2) также расходится.

Доказательство признака эквивалентности (теорема 7)

Так как $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, то по определению предела последовательности (см. лекции по теории пределов и дифференциальному исчислению, опр. 4) имеем:

$\forall \delta > 0\ \exists N > 0$ (N – натуральное число), такое, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $1 - \delta < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \delta$, которое равносильно неравенству

$$(1-\delta)b_n < a_n < (1+\delta)b_n \qquad (27)$$

(так как δ можно брать сколь угодно малым, то предполагается, что $\delta < 1$).

Если ряд (4) сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\delta)b_n$ (см. теорему 2). Принимая во внимание правую часть двойного неравенства (27), из первой части признака сравнения получаем, что ряд (2) сходится.

Если ряд (4) расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta)b_n$ (это также немедленно следует из теоремы 2). Принимая во внимание левую часть двойного неравенства (27), из второй части признака сравнения получаем, что ряд (2) расходится.

Доказательство радикального признака Коши (теорема 5)

Так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = C$, то по определению предела последовательности (см. лекции по теории пределов и дифференциальному исчислению, опр. 4) имеем при конечном C:

$\forall \delta > 0\ \exists N > 0$ (N – натуральное число), такое, что $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$C - \delta < \sqrt[n]{a_n} < C + \delta. \qquad (28)$$

Пусть $C<1$. Так как δ можно брать сколь угодно малым, то будем предполагать, что $q:=C+\delta<1$. Из правой части двойного неравенства (28) выводим, что $\forall n>N \quad a_n<q^n$. Но при положительных $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится (см. пример 3). Следовательно, ряд (2) сходится по признаку сравнения.

Пусть $1<C<\infty$. Так как δ можно брать сколь угодно малым, то будем предполагать, что $q:=C-\delta>1$. Из левой части двойного неравенства (28) выводим, что $\forall n>N \quad q^n<a_n$. Тогда $a_n\to\infty$, и, следовательно, a_n не стремится к нулю. Таким образом, ряд (2) расходится по достаточному признаку расходимости (см. теорему 1 и выводы из нее).

Пусть $C=\infty$. Тогда по определению бесконечного предела (см. пункт 3 определения 4 в лекциях по теории пределов и дифференциальному исчислению) имеем:

$\forall M>0$ (M – сколь угодно большое число) $\exists N>0$, такое, что $\forall n>N \quad \sqrt[n]{a_n}>M$, то есть $a_n>M^n$. Ясно, что можно считать $M>1$. Тогда $a_n\to\infty$, и, следовательно, a_n не стремится к нулю. Таким образом, ряд (2) расходится по достаточному признаку расходимости (см. теорему 1 и выводы из нее).

Доказательство признака Даламбера (теорема 4)

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=D$ равносильно тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=D$, то по определению предела последовательности (см. лекции по теории пределов и дифференциальному исчислению, опр. 4) имеем при конечном D:

$\forall\delta>0\ \exists N>0$ (N – натуральное число), такое, что $\forall n>N$ выполняется неравенство $D-\delta<\frac{a_n}{a_{n-1}}<D+\delta$, которое равносильно неравенству

$$(D-\delta)a_{n-1}<a_n<(D+\delta)a_{n-1}. \qquad (29)$$

Пусть $D<1$. Так как δ можно брать сколь угодно малым, то будем предполагать, что $q:=D+\delta<1$. Таким образом, $\forall n>N$:

$$a_n<q\cdot a_{n-1}. \qquad (30)$$

Если и $n-1>N$, то, заменяя в неравенстве (30) n на $n-1$, получаем:

$$a_{n-1}<q\cdot a_{n-2} \qquad (31)$$

Из неравенств (30) и (31) тогда следует:

$$a_n<q^2\cdot a_{n-2}.$$

Продолжая дальше этот процесс, получаем, что $\forall n>N$:

$$a_n<q^{n-N}\cdot a_N=\frac{a_N}{q^N}\cdot q^n. \qquad (32$$

)

Так как при положительных $q<1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ сходится (см. пример 3), то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_N}{q^N} \cdot q^n$ также сходится (см. теорему 2). Следовательно, ряд (2) сходится по признаку сравнения.

Пусть $1<D<\infty$. Так как δ можно брать сколь угодно малым, то будем предполагать, что $D-\delta>1$. Но тогда из левой части двойного неравенства (29) следует,

что $\forall n>N \quad a_{n-1}<(D-\delta)a_{n-1}<a_n$, то есть члены ряда (2) монотонно возрастают и, следовательно, не могут стремиться к нулю. Таким образом, ряд (2) расходится по достаточному признаку расходимости (см. теорему 1 и выводы из нее).

Пусть $D=\infty$. Тогда по определению бесконечного предела (см. пункт 3 определения 4 в лекциях по теории пределов и дифференциальному исчислению) имеем:

$\forall M>0$ (M – сколь угодно большое число) $\exists N>0$, такое, что $\forall n>N \quad \frac{a_n}{a_{n-1}}>M$, то есть $a_n>M\cdot a_{n-1}$. Ясно, что можно считать $M>1$. Тогда $a_n>M\cdot a_{n-1}>a_{n-1}$, то есть члены ряда (2) монотонно возрастают и, следовательно, не могут стремиться к нулю. Таким образом, ряд (2) расходится по достаточному признаку расходимости (см. теорему 1 и выводы из нее).

Замечание. Несколько модифицируя доказательство признака Даламбера, можно получить следующее, более общее предложение: если (конечный или бесконечный) предел $D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ существует, то существует и предел $C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, причем $C=D$. Обратное неверно: из существования второго предела не следует существование первого. Например, рассмотрим ряд (2), где при нечетных n $a_n=a_{n+1}=\frac{1}{2^{n^2}}$, то есть ряд имеет вид: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{2^{25}}+\frac{1}{2^{25}}+\ldots$. Легко проверить, что $C=0$ (то есть ряд сходится по радикальному признаку Коши), однако предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует (проделайте это!).

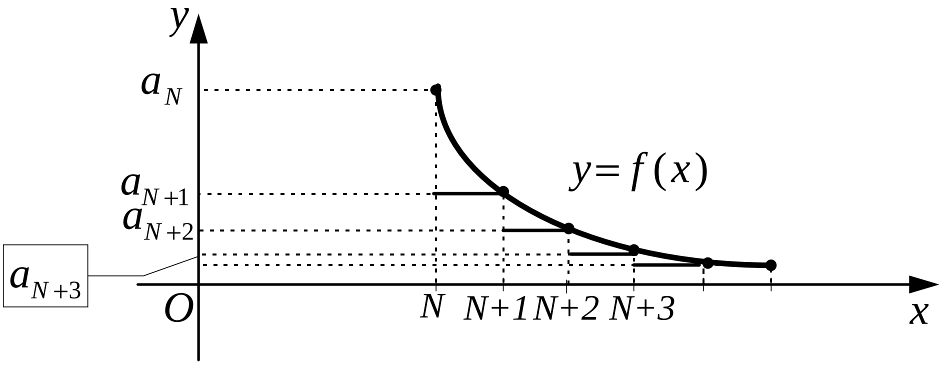
Доказательство интегрального признака Коши (теорема 3)

Пусть $f(x)$ – монотонно убывающая на интервале $[N,\infty)$ функция $f(x)$, удовлетворяющая равенствам

$$f(N)=a_N,\ f(N+1)=a_{N+1},\ f(N+2)=a_{N+2},\ldots$$

Докажем первую часть теоремы. Пусть $\int\limits_N^\infty f(x)dx < \infty$. Ясно, что:

$x \in [N, N+1] \Rightarrow a_{N+1} \le f(x),\ x \in [N+1, N+2] \Rightarrow a_{N+2} \le f(x),\ x \in [N+2, N+3] \Rightarrow a_{N+3} \le f(x), \ldots$



По свойству монотонности определенного интеграла имеем:

$$\int\limits_N^{N+1} a_{N+1}dx \le \int\limits_N^{N+1} f(x)dx,\quad \int\limits_{N+1}^{N+2} a_{N+2}dx \le \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx,\quad \int\limits_{N+2}^{N+3} a_{N+3}dx \le \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx, \ldots,$$

то есть

$$a_{N+1} \le \int\limits_N^{N+1} f(x)dx,\ a_{N+2} \le \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx,\ a_{N+3} \le \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx, \ldots .$$

Обозначая через $\tilde{S}_n$ частные суммы остатка ряда $R_N = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+n} + \ldots$ и применяя свойство аддитивности определенного интеграла, получаем:

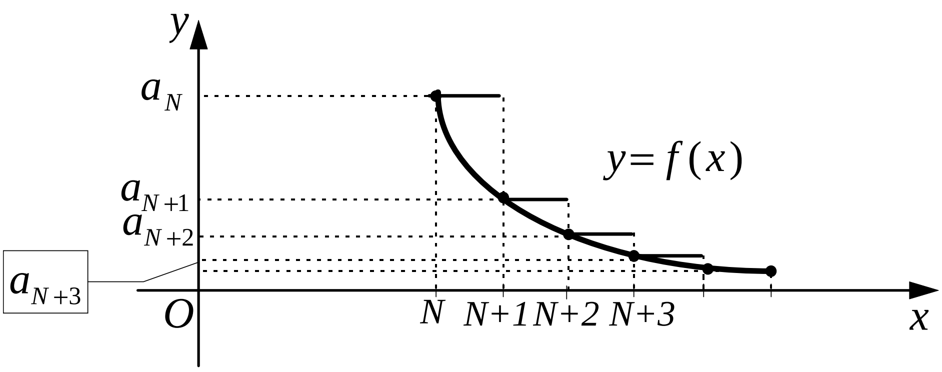
$$\tilde{S}_n = a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+n} \le \int\limits_N^{N+1} f(x)dx + \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx + \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{N+n-1}^{N+n} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_N^{N+n} f(x)dx \le \int\limits_N^\infty f(x)dx < \infty .$$

Ввиду того, что последовательность $\tilde{S}_n$ монотонно возрастает и ограничена сверху, она имеет конечный предел $\tilde{S} = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$. Следовательно, ряд R_N сходится. По лемме 1 ряд (2) также сходится.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть $\int\limits_N^\infty f(x)dx = \infty$. Ясно, что:

$x \in [N, N+1] \Rightarrow a_N \ge f(x),\ x \in [N+1, N+2] \Rightarrow a_{N+1} \ge f(x),\ x \in [N+2, N+3] \Rightarrow a_{N+2} \ge f(x), \ldots$



По свойству монотонности определенного интеграла имеем:

$$\int\limits_{N}^{N+1} a_N dx \geq \int\limits_{N}^{N+1} f(x)dx, \quad \int\limits_{N+1}^{N+2} a_{N+1} dx \geq \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx, \quad \int\limits_{N+2}^{N+3} a_{N+2} dx \geq \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx, \ldots,$$

то есть

$$a_N \geq \int\limits_{N}^{N+1} f(x)dx, \; a_{N+1} \geq \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx, \; a_{N+2} \geq \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx, \ldots .$$

Обозначая через $\tilde{S}_n$ частные суммы остатка ряда $R_N = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+n} + \ldots$ и применяя свойство аддитивности определенного интеграла, получаем:

$$\tilde{S}_n = a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots + a_{N+n} \geq \int\limits_{N}^{N+1} f(x)dx + \int\limits_{N+1}^{N+2} f(x)dx + \int\limits_{N+2}^{N+3} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{N+n}^{N+n+1} f(x)dx =$$

$$= \int\limits_{N}^{N+n+1} f(x)dx \to \infty \text{ при } n \to \infty .$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n = \infty$ и ряд R_N расходится. По лемме 1 ряд (2) также расходится.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 3: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Лекция 6

Доказательство признака абсолютной сходимости (теорема 8)

Наряду с рядом (1) рассмотрим следующие ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- , \tag{33}$$

где

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & \text{если } u_n > 0 \\ 0, & \text{если } u_n \leq 0 \end{cases} \text{ и } u_n^- = \begin{cases} -u_n, & \text{если } u_n < 0 \\ 0, & \text{если } u_n \geq 0 \end{cases}.$$

Ясно, что члены рядов (33) неотрицательны и выполняются неравенства:

$$u_n^+ \leq |u_n| \text{ и } u_n^- \leq |u_n|, \; n = 1, 2, \ldots$$

Так как по условию ряд (5) сходится, то ряды (33) сходятся по признаку сравнения. Но поскольку $u_n = u_n^+ - u_n^-$, то по теореме 2 ряд (1) также сходится.

Доказательство признака Лейбница (теорема 9)

Обозначив частные суммы ряда (6) через S_n, рассмотрим сначала случай, когда число *n* четное, то есть когда $n = 2k$, где $k = 1,2,\ldots$. В выражении

$$S_{2k} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k}$$

сгруппируем члены двояким способом, а именно:

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \tag{34}$$

и

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}. \tag{35}$$

Так как положительные числа a_n монотонно убывают, то выражения, стоящие в скобках, неотрицательны. Поэтому из (34) следует, что последовательность $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$ монотонно возрастает, в то время, как из (35) вытекает неравенство $S_{2k} < a_1$, то есть последовательность $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$ ограничена сверху. Следовательно, данная последовательность имеет конечный предел $S = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k}$, причем из (35) и из условия $a_n \downarrow 0$ следует, что

$$S < a_1. \tag{36}$$

Для нечетных *n*, то есть при $n = 2k+1$, справедливо равенство $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} + \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = S + 0 = S$. Из соотношений $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S$ и $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = S$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (поясните это более подробно!), то есть ряд (6) сходится.

Рассмотрим теперь остаток ряда $R_N = (-1)^{N+2} a_{N+1} + (-1)^{N+3} a_{N+2} + (-1)^{N+4} a_{N+3} + \ldots$. Так как $(-1)^{N+2} R_N = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \ldots = (a_{N+1} - a_{N+2}) + (a_{N+3} - a_{N+4}) + \ldots \geq 0$, то ясно, что $|R_N| = \left|(-1)^{N+2} R_N\right| = |a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \ldots| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \ldots$. Таким образом, ряд $|R_N| = a_{N+1} - a_{N+2} + a_{N+3} - \ldots$ является знакочередующимся рядом в смысле определения 4. Применяя к нему оценку (36), получаем требуемое неравенство $|R_N| < a_{N+1}$.

Доказательство теоремы 10

Выпишем ряд, состоящий из модулей членов степенного ряда (8):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n = |c_0| + |c_1| \cdot |x| + |c_2| \cdot |x|^2 + \ldots + |c_n| \cdot |x|^n + \ldots. \tag{37}$$

К ряду (37) применим радикальный признак Коши:

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=0$, то $C=0$ и ряд (37) сходится при всех действительных *x*. Следовательно, ряд (8) абсолютно сходится при всех действительных *x*.

Если $0<\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\le\infty$, то ряд (37) сходится при $C<1$, то есть при $|x|<\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, а при $C>1$, то есть, при $|x|>\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, общий член ряда (37) (а, следовательно, и общий член ряда (8)) не стремится к нулю (это утверждение содержится в доказательстве теоремы 5). Поэтому при $|x|<\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ ряд (8) абсолютно сходится, а при $|x|>\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ ряд (8) расходится.

Во всех случаях, полагая $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$ и считая, что $\dfrac{1}{0}=\infty$, а $\dfrac{1}{\infty}=0$, получаем, что при $|x|<R$ ряд (8) абсолютно сходится, а при $|x|>R$ ряд (8) расходится.

Доказательство теоремы 11

К ряду (37) применим признак Даламбера:

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|\cdot|x|^{n+1}}{|c_n|\cdot|x|^n}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

Остальная часть доказательства дословно повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 10, если в последней параметр Коши *C* заменить на параметр Даламбера *D*, а предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ заменить на предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$.

Доказательство теоремы 12

Из теоремы 10 следует, что при $x=r$ ряд (8) абсолютно сходится, то есть сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot r^n$, получаемый из (37) подстановкой $x=r$. Если $|x|\le r$, то $|c_nx^n|=|c_n|\cdot|x|^n\le|c_n|\cdot r^n$, то есть ряд (8) имеет мажорируемую сходимость.

В доказательстве теоремы 13 мы будем использовать следующую простую лемму из теории интеграла.

<u>Лемма 2.</u> Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx. \qquad (38)$$

<u>Доказательство</u> предоставляется читателю.

Доказательство теоремы 13

Докажем сначала непрерывность на $[a,b]$ функции $S(x)$. По условию теоремы существует сходящийся ряд (11) с положительными членами, такой, что для всех $x \in [a,b]$ и для всех $n = 0,1,2,3,\ldots$ выполняется неравенство (12) (см. определение 8). Из сходимости ряда (11) следует, что $\forall \delta > 0 \ \exists N > 0$ (N – натуральное число), такое, что выполняется неравенство:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots < \frac{\delta}{3}.$$

Ввиду того, что исходный ряд (7) состоит из непрерывных на $[a,b]$ функций, частная сумма $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x)$ непрерывна на $[a,b]$ как сумма ***конечного*** числа непрерывных функций. Это означает, что по заданному $\delta > 0$ и любой последовательности $x_k \to x$
(x – фиксированная точка отрезка $[a,b]$, $x_k \in [a,b]$) можно найти такой номер $K > 0$, что для любого $k > K$ выполняется неравенство $|S_N(x) - S_N(x_k)| < \frac{\delta}{3}$.
Имеем при $k > K$:

$$|S(x) - S(x_k)| = |(S_N(x) + R_N(x)) - (S_N(x_k) + R_N(x_k))| = |(S_N(x) - S_N(x_k)) + R_N(x) - R_N(x_k)| \le$$
$$\le |S_N(x) - S_N(x_k)| + |R_N(x)| + |R_N(x_k)| < \frac{\delta}{3} + |R_N(x)| + |R_N(x_k)|.$$

Далее,

$$|R_N(x)| = |u_{N+1}(x) + u_{N+2}(x) + \ldots| \le |u_{N+1}(x)| + |u_{N+2}(x)| + \ldots \le a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots < \frac{\delta}{3}. \qquad (39)$$

Точно так же, $|R_N(x_k)| < \frac{\delta}{3}$. Окончательно получаем:

$$|S(x) - S(x_k)| < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta.$$

Итак, мы получили, что для любой последовательности $x_k \to x$ $\lim\limits_{k\to\infty} S(x_k) = S(x)$.
А это и означает, что функция $S(x)$ непрерывна при любом $x \in [a,b]$.

Докажем соотношение (13). Для этого покажем, что при $m \to \infty$ $\sum_{n=0}^{m} \int_a^b u_n(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$, или, что равносильно, $\int_a^b S_m(x)dx \to \int_a^b S(x)dx$ (напомним, что $S_m(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_m(x)$). Из сходимости ряда (11) следует, что $\forall \delta > 0 \ \exists N > 0$ (N – натуральное число), такое, что выполняется неравенство:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \ldots < \frac{\delta}{b-a}. \qquad (40)$$

Используя лемму 2, получаем при $m > N$:

$$\left|\int_a^b S(x)dx-\int_a^b S_m(x)dx\right|=\left|\int_a^b \big(S(x)-S_m(x)\big)dx\right|\le\int_a^b |S(x)-S_m(x)|dx=\int_a^b |R_m(x)|dx\,.$$

Применяя неравенство (40) к выкладкам, проведенным в (39), получаем, что для любых $x\in[a,b]$ выполняется неравенство $|R_m(x)|<\dfrac{\delta}{b-a}$. По известным свойствам определенного интеграла имеем: $\left|\int_a^b S(x)dx-\int_a^b S_m(x)dx\right|\le\int_a^b |R_m(x)|dx<\dfrac{\delta}{b-a}\cdot(b-a)=\delta$, что и доказывает соотношение (13).

Доказательство следствия из теоремы 13

Ясно, что степенной ряд (8) имеет мажорируемую сходимость на отрезке, соединяющем точки 0 и t (см. теорему 12), а члены этого ряда непрерывны на всей прямой. Применяя теорему 13, получаем соотношение (14), верное для любого $t\in(-R,R)$. Вычисляя радиус сходимости степенного ряда (14) по формуле из теоремы 10, без труда получаем, что он совпадает с радиусом сходимости R ряда (8).

Доказательство теоремы 14

Обозначим через $f(t)$ сумму ряда $u_0'(t)+u_1'(t)+...+u_n'(t)+...$, который при $t=x$ совпадает с рядом, стоящим в правой части равенства (16), и который по условию теоремы имеет мажорируемую сходимость на некотором отрезке $[x-\delta, x+\delta]\subset(a,b)$ (заметим, что в проводимом доказательстве x считается постоянным числом). Если учесть, что члены $u_n'(t)$ этого ряда непрерывны, то из теоремы 13 можно сделать вывод, что функция $f(t)$ непрерывна на $[x-\delta, x+\delta]$. Пусть z – произвольная точка интервала $(x-\delta, x+\delta)$. Применяя формулу (13) из теоремы 13 и формулу Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_x^z f(t)dt=\int_x^z\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_x^z u_n'(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\big(u_n(z)-u_n(x)\big)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)-\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=S(z)-S(x)\,.$$

Из этого равенства, во-первых, немедленно следует, что функция $S(z)$ имеет производную при $z\in(x-\delta, x+\delta)$, а во-вторых, используя формулу для вычисления производной от интеграла с переменным верхним пределом, получаем:

$$\left(\int_x^z f(t)dt\right)'=\big(S(z)-S(x)\big)'\;\Rightarrow\; f(z)=S'(z)\;\Rightarrow\; S'(z)=u_0'(z)+u_1'(z)+...+u_n'(z)+....$$

Полагая здесь $z=x$, получаем формулу (16).

Доказательство следствия из теоремы 14

Вычисляя радиус сходимости степенного ряда (17) по формуле из теоремы 10, без труда получаем, что он совпадает с радиусом сходимости R ряда (8). Теперь из теоремы 12 вытекает, что при достаточно малом δ ряд (17) имеет мажорированную сходимость на отрезке $[x-\delta, x+\delta]\subset(-R,R)$. Так как все остальные условия теоремы 14 выполняются тривиально, то соотношение (17) справедливо.

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 3: ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Лекция 7

Доказательство теоремы 15

При $n=0$ равенство (19) выполняется очевидным образом. Рассмотрим случай $n\geq 1$. По следствию из теоремы 14 получаем, что на интервале $(-r,r)$ равенство (18) можно почленно дифференцировать сколько угодно раз. Продифференцируем это равенство $k\geq 1$ раз:

$$f^{(k)}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n\right)^{(k)}=\left(\sum_{n=0}^{k-1}c_n x^n+c_k x^k+c_{k+1}x^{k+1}+c_{k+2}x^{k+2}+\ldots\right)^{(k)}=0+c_k\cdot k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1+$$

$$+c_{k+1}\cdot(k+1)k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot x+c_{k+2}\cdot(k+2)(k+1)k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot x^2+\ldots.$$

Ясно, что $f^{(k)}(0)=c_k\cdot k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1=c_k\cdot k!$, где $k=1,2,\ldots$. Таким образом, формула (19) доказана.

Для доказательства теоремы 16 нам понадобится следующая лемма.

<u>*Лемма 3.*</u> Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз на интервале $(-r,r)$. Тогда для любого $x\in(-r,r)$ существует точка ξ, лежащая между точками 0 и x, такая, что выполняется следующее равенство (***формула Тейлора***):

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}. \qquad (41)$$

<u>*Доказательство*</u>. При $x=0$ равенство (41) очевидно. Зафиксируем неравное нулю число $x\in(-r,r)$ и введем следующие обозначения:

$$\omega:=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)\cdot x-\dfrac{f''(0)}{2!}\cdot x^2-\ldots-\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n}{x^{n+1}}, \qquad (42)$$

$$\varphi(t):=f(x)-f(t)-f'(t)\cdot(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2-\ldots-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n-\omega\cdot(x-t)^{n+1},\ t\in(-r,r).$$

Вычислим производную функции $\varphi(t)$, дифференцируя сначала сомножители, содержащие f , а затем вторые сомножители, и группируя результаты дифференцирования соответствующим образом (при этом x считается константой):

$$\varphi'(t) := \left[0 - f'(t) - f''(t)\cdot(x-t) - \frac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 - \ldots \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n\right] -$$

$$- f'(t)\cdot(-1) - \frac{f''(t)}{2!}\cdot 2(x-t)\cdot(-1) - \frac{f'''(t)}{3!}\cdot 3(x-t)^2\cdot(-1) - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}\cdot(n-1)\cdot(x-t)^{n-2}\cdot(-1) -$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n(x-t)^{n-1}\cdot(-1) - \omega(n+1)(x-t)^n\cdot(-1) =$$

$$= -\left[f'(t) + f''(t)\cdot(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right] - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n +$$

$$+\left[f'(t) + f''(t)\cdot(x-t) + \frac{f'''(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right] + \omega(n+1)(x-t)^n =$$

$$= \omega(n+1)(x-t)^n - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n.$$

Очевидно, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(0) = 0$. По теореме Ролля существует такая точка ξ, лежащая между точками 0 и x и не совпадающая с ними, что $\varphi'(\xi) = 0$, то есть:

$$\omega(n+1)(x-\xi)^n - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n = 0 \;\Rightarrow\; \omega(n+1) - \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} = 0 \;\Rightarrow\; \omega = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Подставляя полученное значение ω в (42), немедленно получаем формулу Тейлора (41).

Доказательство теоремы 16

Обозначим $S_n(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$. Тогда, применяя формулу Тейлора (41), получаем:

$$\left|f(x) - S_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\cdot|x|^{n+1} \le M\cdot\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$$

(последнее неравенство следует из условий теоремы). Так как ряд с общим членом $\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится (см. пример 25), то по необходимому признаку сходимости (теорема 1) этот общий член стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f(x) - S_n(x)\right| = 0$ при $x \in (-r, r)$. А это и означает, что $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n$ при $x \in (-r, r)$.

В оставшейся части данной лекции нами будут рассмотрены на примерах возможности применения формул (21)–(26) к разложению в степенные ряды более сложных функций, к вычислению приближенных значений элементарных функций, а также к приближенному вычислению определенных интегралов.

Пример 30. Разложим в степенной ряд функцию $f(x)=\sin^2 x$. По известной формуле тригонометрии имеем: $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Подставляя в равенство (24) $2x$ вместо *x*, получаем для любого $x\in(-\infty,+\infty)$:

$$\cos 2x=1-\frac{2^2}{2!}\cdot x^2+\frac{2^4}{4!}\cdot x^4-\frac{2^6}{6!}\cdot x^6+\frac{2^8}{8!}\cdot x^8-\ldots.$$

Итак:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{2^2}{2!}\cdot x^2+\frac{2^4}{4!}\cdot x^4-\frac{2^6}{6!}\cdot x^6+\frac{2^8}{8!}\cdot x^8-\ldots\right)\right]=\frac{2}{2!}\cdot x^2-\frac{2^3}{4!}\cdot x^4+\frac{2^5}{6!}\cdot x^6-\frac{2^7}{8!}\cdot x^8+\ldots.$$

Пример 31. Разложим в степенной ряд функцию $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, играющую значительную роль в теории вероятностей. Подставляя в равенство (22) $-t^2$ вместо *x*, получаем для любого $t\in(-\infty,+\infty)$:

$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{2!}-\frac{t^6}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n!}.$$

Применяя следствие из теоремы 13 о почленном интегрировании степенных рядов, получаем:

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt==\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+\ldots.$$

Пример 32. Разложим в степенной ряд функцию $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ при $x\in(-1,1)$. Имеем, применяя свойства логарифма и формулу (21):

$$\ln(x^2+3x+2)=\ln[(x+2)(x+1)]=\ln(x+2)+\ln(x+1)=\ln\left[2\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]+\ln(1+x)=$$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+\ln(1+x)=\ln 2+\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2^2\cdot 2}+\frac{x^3}{2^3\cdot 3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2^n\cdot n}+\ldots\right)+$$

$$+\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{(2^{-n}+1)}{n}x^n.$$

Пример 33. Вычислим $\sin 1{,}2$ с точностью до 0,001. Применим разложение (23):

$$\sin 1{,}2=1{,}2-\frac{(1{,}2)^3}{3!}+\frac{(1{,}2)^5}{5!}-\frac{(1{,}2)^7}{7!}+\ldots=1{,}2-\frac{1{,}728}{6}+\frac{2{,}48832}{120}-\frac{3{,}5831808}{5040}+\ldots.$$

Ясно, что данный ряд является знакочередующимся. Следовательно, по теореме 9 модуль остатка ряда оценивается модулем первого члена остатка. Таким образом, остаток мы можем отбросить, начиная с члена, модуль которого будет меньше требуемой точности вычисления. Имеем:

$$1{,}2>0{,}001;\quad \frac{1{,}728}{6}=0{,}288>0{,}001;\quad \frac{2{,}48832}{120}=0{,}0207>0{,}001;\quad \frac{3{,}5831808}{5040}\approx 0{,}0007<0{,}001.$$

Поэтому остаток данного ряда можно отбросить, начиная с четвертого члена. Получаем приближенное равенство $\sin 1{,}2 \approx 1{,}2 - 0{,}288 + 0{,}0207 = 0{,}9327 \approx 0{,}933$, справедливое с точностью до 0,001.

Замечание. Вычисление (с любой точностью) значений функций $\sin x$ и $\cos x$ (при любых x), а также функции $arctgx$ (при $x \in (-1{,}1)$) всегда может быть осуществлено тем же способом, как это было сделано в примере 33, так как при всех указанных $x \neq 0$ соответствующие ряды ***всегда*** являются знакочередующимися и к ним может быть применена оценка остатка из теоремы 9. Значения же функции $arctgx$ при $|x| > 1$ можно вычислять с помощью легко проверяемой формулы $2arctgt = arctg\frac{2t}{1-t^2}$, позволяющей сводить вычисления арктангенса от больших значений аргумента к вычислению арктангенса от меньших значений аргумента (читателю предлагается разобраться в этом самостоятельно).

Пример 34. Вычислим $e^{-\frac{1}{5}}$ с точностью до 0,00001. Применим формулу (22):

$$e^{-\frac{1}{5}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2!5^2} - \frac{1}{3!5^3} + \frac{1}{4!5^4} - \frac{1}{5!5^5} + \ldots .$$

Этот ряд знакочередующийся, поэтому опять применим методику примера 33:

$$1 > 0{,}00001; \ \frac{1}{5} = 0{,}2 > 0{,}00001; \ \frac{1}{2!5^2} = 0{,}02 > 0{,}00001; \ \frac{1}{3!5^3} \approx 0{,}001333 > 0{,}00001;$$

$$\frac{1}{4!5^4} \approx 0{,}000067 > 0{,}00001; \ \frac{1}{5!5^5} \approx 0{,}000003 < 0{,}00001.$$

Следовательно, $e^{-\frac{1}{5}} \approx 1 - 0{,}2 + 0{,}02 - 0{,}001333 + 0{,}000067 \approx 0{,}81873$ с нужной точностью.

Замечание. Вычисление (с любой точностью) значений функции e^x при $x < 0$ всегда может быть осуществлено тем же способом, как это было сделано в примере 34, так как при этих x соответствующие ряды ***всегда*** являются знакочередующимися и к ним может быть применена оценка остатка из теоремы 9. При $x > 0$ ситуация несколько усложняется, так как в этом случае ряд (22) знакоположителен. Однако нетрудно доказать, что при $0 < x < N+1$ справедлива следующая оценка его остатка:

$$R_N < \frac{x^{N+1}}{N!(N+1-x)},$$

которая также позволяет достигать необходимой точности вычислений путем отбрасывания остатка, начиная с некоторого члена ряда.

Пример 35. Вычислим $\sqrt[3]{130}$ с точностью до 0,001. Представим $130 = 5^3 + 5$. Используя разложение (26), имеем:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3+5} = 5\sqrt[3]{1+\frac{1}{25}} = 5(1+0{,}04)^{\frac{1}{3}} = 5\left(1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}04 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot 0{,}0016 + \ldots\right) =$$

$$= 5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2-\frac{1}{9}\cdot 0{,}008+\ldots.$$

Ясно, что полученный ряд становится знакочередующимся, начиная со второго члена. Так как третий член меньше 0,001, то его и все последующие члены можно отбросить. Поэтому $\sqrt[3]{130}\approx 5+\frac{1}{3}\cdot 0{,}2\approx 5{,}067$.

Пример 36. Вычислим $\int\limits_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx$ с точностью до 0,0001. Сначала, используя формулу (24), разложим подынтегральную функцию в степенной ряд:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{x^2}=\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots.$$

Очевидно, что полученный ряд (так же, как и ряд (24)) сходится на всей прямой. Применяя следствие из теоремы 13 о почленном интегрировании степенных рядов, получаем:

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{1-\cos x}{x^2}dx=\int\limits_0^{0,5}\left(\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\frac{x^4}{6!}-\ldots\right)dx=\left(\frac{1}{2!}x-\frac{x^3}{4!\cdot 3}+\frac{x^5}{6!\cdot 5}-\ldots\right)\Bigg|_0^{0,5}=\frac{1}{2!}\cdot 0{,}5-\frac{0{,}5^3}{4!\cdot 3}+\frac{0{,}5^5}{6!\cdot 5}-\ldots\approx$$

$$\approx 0{,}25-0{,}00174+0{,}00001-\ldots\approx 0{,}25-0{,}00174\approx 0{,}2483.$$

Пример 37. Вычислим $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001. Имеем:

$$\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=\int\limits_0^{0,1}\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)dx=\int\limits_0^{0,1}\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\ldots\right)\Bigg|_0^{0,1}=$$

$$=0{,}1-\frac{0{,}01}{4}+\frac{0{,}001}{9}-\ldots\approx 0{,}1-\frac{0{,}01}{4}\approx 0{,}098.$$

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ РЯДОВ

ЧАСТЬ 4: РЯДЫ ФУРЬЕ

Лекция 8

Определение 9. Тригонометрическим рядом называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right), \tag{43}$$

где a_0, a_n, b_n – действительные числа, называемые коэффициентами этого ряда.

Заметим, что до этого момента буквами a_n и b_n мы обозначали только положительные числа. Теперь мы отказываемся от этого соглашения, так что a_n и b_n могут иметь любой знак. Первый член ряда (43) записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия нижеследующих формул (45).

<u>*Теорема 17*</u>. Предположим, что

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right) < \infty . \qquad (44)$$

Тогда:

1) ряд (43) сходится всюду на действительной прямой *R* к непрерывной и периодической (с периодом $T = 2\pi$) функции $f(x)$, причем эта сходимость является мажорируемой на *R*;
2) по функции $f(x)$ коэффициенты a_n и b_n вычисляются в соответствии с формулами:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = 1,2,\ldots; \end{cases} \qquad (45)$$

3) справедливо следующее равенство Парсеваля:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right). \qquad (46)$$

<u>*Доказательство*</u>. 1) Оценим общий член ряда (43) при $x \in R$:

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \le |a_n\cos nx| + |b_n\sin nx| = |a_n|\cdot|\cos nx| + |b_n|\cdot|\sin nx| \le |a_n| + |b_n|.$$

Согласно определению 8 ряд (43) имеет мажорируемую сходимость на всей действительной прямой *R*. Применяя первую часть теоремы 13, получаем, что сумма $f(x)$ этого ряда является функцией, непрерывной на *R*. Так как все члены ряда (43) периодичны с периодом $T = 2\pi$, то и функция $f(x)$ обладает этим же свойством.

2) Применяя вторую часть теоремы 13, заключаем, что равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right) \qquad (47)$$

можно интегрировать почленно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx\right) = \frac{a_0}{2}\cdot x\Big|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{b_n}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\cdot 0 - \frac{b_n}{n}\cdot 0\right) = \pi a_0 .$$

Таким образом, получили соотношение $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

Умножим теперь обе части равенства (47) на функцию $\cos mx,\ m = 1,2,\ldots$:

$$f(x)\cos mx=\frac{a_0}{2}\cdot\cos mx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx\cdot\cos mx+b_n\sin nx\cdot\cos mx\right). \tag{48}$$

Очевидно, что ряд (48) также имеет мажорируемую сходимость на R и, следовательно, его также можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx\,dx\right). \tag{49}$$

Мы уже получили, что $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx=0$. Далее, если $m\neq n$, то, применяя формулы преобразований произведений тригонометрических функций в суммы, получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cdot\cos mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x\right]dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m}+\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Если $m=n$, то, используя формулы понижения степени, имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2m)dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2mx}{2m}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$

Совершенно аналогично, для любых $m,n=1,2,\ldots$ получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\cos mx\,dx=0.$$

Таким образом, равенство (49) принимает вид:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx=a_m\pi\;\Rightarrow\;a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mx\,dx.$$

Умножая равенство (47) на $\sin mx,\ m=1,2,\ldots$, интегрируя почленно полученное соотношение и вычисляя

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx=\begin{cases}0, & \text{если } m\neq n,\\ \pi, & \text{если } m=n,\end{cases}$$

аналогично предыдущему получаем $b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mx\,dx$.

3) Запишем равенство (47) двумя способами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

и

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos mx+b_m\sin mx\right)$$

и перемножим левые и правые части этих равенств. Получаем:

$$f^2(x)=\frac{a_0^2}{4}+\frac{a_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)+\frac{a_0}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos mx+b_m\sin mx\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\left(a_m\cos mx+b_m\sin mx\right)=\frac{a_0^2}{4}+a_0\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_n a_m \cos nx\cos mx + a_n b_m \cos nx \sin mx + b_n a_m \sin nx \cos mx + b_n b_m \sin nx \sin mx\right).$$

Легко доказать (докажите это!), что если перемножать указанным способом ряды с мажорированной сходимостью, то в результате также получится ряд, обладающий мажорированной сходимостью. Проинтегрировав его почленно и принимая во внимание предыдущие вычисления интегралов от произведений синусов и косинусов, имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0^2}{4}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2\pi + b_n{}^2\pi\right) = \frac{a_0^2}{2}\pi + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n{}^2 + b_n{}^2\right),$$

откуда и вытекает равенство Парсеваля (46).

<u>*Пример 38*</u>. Положим в (43) $a_0 = \frac{2}{3}\pi^2,\ a_n = \frac{4\cdot(-1)^n}{n^2},\ b_n = 0,\ n = 1,2,\ldots.$

Получаем ряд

$$\frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}\cos nx. \tag{50}$$

Имеем $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n| + |b_n|\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$, так как последний ряд является p-гармоническим с $p = 2 > 1$ и, следовательно, сходится. Таким образом, условия теоремы 17 выполнены и ряд (50) сходится к некоторой непрерывной, 2π-периодической функции $f(x)$, для которой справедливы равенства (45) и (46). Однако покамест мы не в состоянии определить аналитический вид этой функции.

<u>*Замечание.*</u> Без особого труда можно несколько обобщить теорему 17, рассматривая вместо ряда (43) ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{43*}$$

который представляет функцию с периодом $T = 2L$. Формулировка теоремы 17 остается той же, если в ней везде, кроме формул (45), вместо π писать L, а формулы (45) писать в виде:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, & n = 0,1,2,\ldots, \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, & n = 1,2,\ldots. \end{cases} \tag{45*}$$

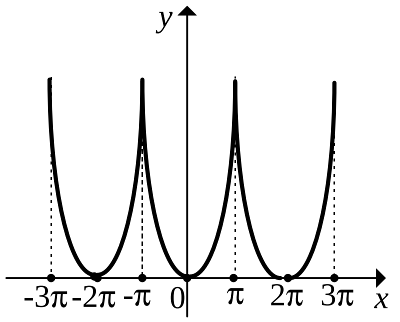
Во многих теоретических и прикладных задачах бывает весьма важно уметь представлять функции в виде тригонометрических рядов. Формулы (45) и (45*) дают нам идею, как по заданной функции пытаться искать представляющий ее тригонометрический ряд.

<u>*Определение 10*</u>. Пусть $f(x)$ – функция, определенная на интервале $(-L, L)$ и периодически продолженная за этот интервал формулой

$f(x+2L)=f(x)$. Рядом Фурье функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд (43*), коэффициенты которого вычислены по формуле (45*). Эти коэффициенты называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Определение 10 всякой функции $f(x)$, у которой существуют интегралы (45*), ***лишь только ставит в соответствие*** тригонометрический ряд (43*). Пока мы ничего не знаем о совпадении функции с ее рядом Фурье.

Пример 39 (продолжение примера 38). Вычислим коэффициенты Фурье функции $y=x^2$. Периодическое продолжение этой функции имеет вид:



Используя четность функций x^2, $\cos nx$ и нечетность функции $\sin nx$ и интегрируя по частям, по формулам (45) имеем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x^2 & \Rightarrow & du=2x\,dx \\ dv=\cos nx\,dx & \Rightarrow & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x^2\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\cdot 2x\,dx\right)=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=\left|\begin{matrix} u=x & \Rightarrow & du=dx \\ dv=\sin nx\,dx & \Rightarrow & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\cos nx\,dx\right)=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_0^{\pi}\right)=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nx\,dx=0.$$

Таким образом, ряд Фурье функции $y=x^2$ имеет вид (50).

Теорема 18 (признак Дирихле). Пусть функция $f(x)$ из определения 10 ограничена на $(-L,L)$, имеет на $(-L,L)$ не более конечного числа точек разрыва и кусочно-монотонна на этом интервале (то есть интервал $(-L,L)$ можно разбить на конечное число непересекающихся интервалов, внутри которых по отдельности функция монотонна). Тогда выполняется равенство Парсеваля, ряд Фурье этой функции сходится всюду на R и:

1) в каждой точке непрерывности $x\in(-L,L)$ его сумма равна $f(x)$;

2) в каждой точке разрыва $x=x_i$ его сумма равна $\frac{1}{2}\big(f(x_i-0)+f(x_i+0)\big)$, где $f(x_i-0)=\lim\limits_{x\to x_i-0}f(x)$, $f(x_i+0)=\lim\limits_{x\to x_i+0}f(x)$;

3) в граничных точках $-L$ и L его сумма равна $\frac{1}{2}\big(f(-L+0)+f(L-0)\big)$.

Доказательство опускается.

Пример 40 (продолжение примеров 38 и 39). Ясно, что условия теоремы 18 выполнены для функции $y = x^2$. Так как функция непрерывна на замкнутом интервале $[-\pi, \pi]$ и на концах этого интервала принимает равные значения, то очевидно, что равенство

$$x^2 = \frac{1}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos nx$$

выполняется во всех точках отрезка $[-\pi, \pi]$. Если в этом равенстве вместо функции x^2 записать ее периодическое продолжение, то есть функцию, представленную на рисунке в примере 39, то это равенство будет выполняться всюду на прямой.

ОБРАЗЕЦ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ
ПО ЧИСЛОВЫМ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ РЯДАМ

Задача 1

Исследовать на сходимость ряды с положительными членами:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-7}{\sqrt[3]{n^8+2}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \, arctg \frac{1}{5^n}$. 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln n}}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$. 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+5}{(2n)!}$. 6) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n \frac{n^2+2}{n^2+3n}$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)^2}$. 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n+4)}{3n^2+4n}$. 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{4n^2+3} \right)^{2n}$.

Задача 2

Установить характер сходимости знакочередующихся рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^{n-1}}{\sqrt{n^3+1}}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot \ln^3(n+1)}$.

Задача 3

Найти область сходимости степенных рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2 \cdot \sqrt{n}}$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n \cdot \sqrt{5^n}}$. 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \cdot n!}$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3+2n}$.

Задача 4

Вычислить с заданной точностью:

1) $\ln(1{,}05)$, $\varepsilon=10^{-4}$.

2) $\cos 10^0$, $\varepsilon=10^{-3}$.

3) $\int\limits_0^{0,5}\sin x^3dx$, $\varepsilon=10^{-4}$.

4) $\int\limits_0^{0,6}\sqrt[4]{1+x^3}dx$, $\varepsilon=10^{-3}$.

Задача 5

Разложить в ряд Фурье функцию:

1) $f(x)=|x|$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

2) $f(x)=\begin{cases}-1 \text{ } \mathit{при} \text{ } -1<x<0,\\ 1 \text{ } \mathit{при} \text{ } 0<x<1.\end{cases}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Решение задачи 1

1) Применим признак эквивалентности (см. теорему 7). Запишем эквивалентность $a_n=\dfrac{n-7}{\sqrt[3]{n^8+2}}\sim\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^8}}=\dfrac{1}{n^{5/3}}=b_n$ при $n\to\infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{5/3}}$ является p-гармоническим с $p=\dfrac{5}{3}>1$. Поэтому он сходится (см. пример 7). Таким образом, исходный ряд сходится по признаку эквивалентности.

2) Так как $\dfrac{1}{5^n}\to 0$ при $n\to\infty$, то можно применить эквивалентность: $arctg\dfrac{1}{5^n}\sim\dfrac{1}{5^n}$. Тогда получаем: $a_n=2^n arctg\dfrac{1}{5^n}\sim\left(\dfrac{2}{5}\right)^n=b_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ сходится как ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с частным $q=\dfrac{2}{5}<1$ (см. примеры 1, 3). Значит исходный ряд также сходится по признаку эквивалентности (см. теорему 7).

3) Так как $a_n=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt{\ln n}}$ монотонно убывает, то можно применить интегральный признак Коши (см. теорему 3). Имеем:

$$\int_2^{\infty} a_n dn = \int_2^{\infty} \frac{dn}{n\cdot\sqrt{\ln n}} = \left| \begin{array}{c} t = \ln n \\ dt = \dfrac{dn}{n} \\ n = 2 \to t = \ln 2,\ n = \infty \to t = \infty \end{array} \right| = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_{\ln 2}^{\infty} = \infty - 2\sqrt{\ln 2} = \infty$$

.

Значит данный ряд расходится.

4) Применим признак Даламбера (см. теорему 4). Вычислим D :

$$a_n = \frac{n^2}{(n+1)!},\ a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+2)},$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2(n+1)!}{(n+1)!(n+2)n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Так как D<1, то исходный ряд сходится.

5) Запишем эквивалентность: $a_n = \dfrac{3^n + 5}{(2n)!} \sim \dfrac{3^n}{(2n)!} = b_n$.

К ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(2n)!}$ применим признак Даламбера (см. теорему 4).

Так как $b_{n+1} = \dfrac{3^{n+1}}{(2(n+1))!} = \dfrac{3^{n+1}}{(2n+2)!} = \dfrac{3^n 3}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}$, то

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n 3(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Значит исходный ряд также сходится по признаку эквивалентности (см. теорему 7).

6) Применим радикальный признак Коши (см. теорему 5). Вычислим

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{arctg^n \frac{n^2+2}{n^2+3n}} = \lim_{n\to\infty} arctg \frac{n^2+2}{n^2+3n} = arctg 1 = \frac{\pi}{4} < 1$$

(при вычислении предела учитывалось, что $\dfrac{n^2+2}{n^2+3n} \to 1$ при $n \to \infty$). Так как C<1, то по радикальному признаку Коши ряд сходится.

7) Исследуем ряд на сходимость с помощью радикального признака Коши (см. теорему 5).

$C=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{e^n}{(n+1)^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e}{\sqrt[n]{(n+1)^2}}=\dfrac{e}{\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)}\right)^2}=e>1$. (Из теории пределов известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$). Так как $C>1$, то данный ряд расходится.

8) Оценим общий член ряда: $a_n=\dfrac{\cos^2(n+4)}{3n^2+4n}\le\dfrac{1}{3n^2+4n}\le\dfrac{1}{3n^2}=b_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, так как является p-гармоническим с $p=2>1$ (см. пример 7). Тогда по теореме 2 и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно и исходный ряд сходится по признаку сравнения (см. теорему 6).

9) Воспользуемся радикальным признаком Коши (см. теорему 5). Имеем:

$$C=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2}{4n^2+3}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{4n^2+3}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^4}{16n^4}=\frac{9}{16}<1,$$

значит данный ряд сходится.

<u>Решение задачи 2</u>

1) Рассмотрим ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Имеем: $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\sim\dfrac{1}{n^{1/2}}$ при $n\to\infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$ расходится, как p-гармонический с $p=\dfrac{1}{2}<1$, значит и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ расходится по признаку эквивалентности. Исходный ряд является знакочередующимся, так как он имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, где $a_n>0$. Далее имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$. Очевидно, что a_n монотонно убывает. Таким образом, исходный ряд сходится по признаку Лейбница (см. теорему 9). Итак, данный знакочередующийся ряд условно сходится.

2) Исследуем ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, а именно $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$. Применим признак Даламбера (см. теорему 4).

$a_n=\frac{1}{(n+1)3^n}$, $\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+2)3^{n+1}}$, $\quad D=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{(n+2)3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$. Значит исследуемый ряд сходится. Применяя признак абсолютной сходимости (см. теорему 8), заключаем, что исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно.

3) Представим ряд в виде: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 10^{n-1}}{\sqrt{n^3+1}}$. Составим ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{n-1}}{\sqrt{n^3+1}}$. Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^{n-1}}{\sqrt{n^3+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n}{10\cdot n^{3/2}}$. Так как выражение под последним пределом представляет собой неопределенность типа $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то для вычисления этого предела применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n\ln 10}{15\cdot n^{1/2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^{1/2}\cdot 10^n\ln^2 10}{15}=\infty\neq 0$. Поэтому исследуемый ряд с положительными членами расходится (см. теорему 1). Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то исходный знакочередующийся ряд расходится по признаку Лейбница (см. теорему 9).

4) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^3(n+1)}$, составленный из модулей членов исходного ряда. Применим интегральный признак Коши (см. пункт 3 задачи 1).

$$\int_1^{\infty}a_n dn=\int_1^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln^3(n+1)}=\left|\begin{array}{c} t=\ln(n+1)\\ dt=\dfrac{dn}{n+1}\\ n=1\to t=\ln 2,\ n=\infty\to t=\infty\end{array}\right|=\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{dt}{t^3}=\left.\frac{t^{-2}}{-2}\right|_{\ln 2}^{\infty}=$$

$$=0+\frac{1}{2\ln^2 2}=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Так как $\int\limits_1^{\infty} a_n dn < \infty$, то рассматриваемый ряд сходится (см. теорему 3). Значит исходный знакочередующийся ряд сходится абсолютно (см. теорему 8).

Решение задачи 3

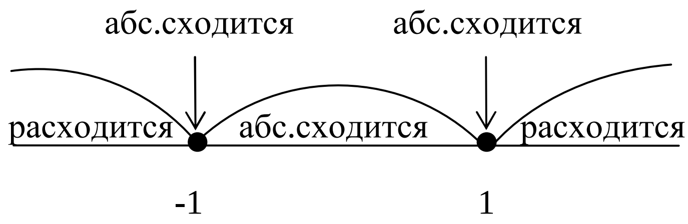
1) Найдем радиус сходимости степенного ряда по теореме 10: $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Здесь $|c_n| = \dfrac{1}{n^2\cdot\sqrt{n}}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2\cdot\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{3/2}}} = 1$ (из теории пределов известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^{3/2}} = 1$). Таким образом, $R = 1$.

При $x = -1$ исходный ряд превращается в ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{2n}}{n^2\cdot\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$, который сходится, как p-гармонический с $p=\dfrac{3}{2}>1$ (см. пример 7).

При $x = 1$ получаем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2\cdot\sqrt{n}}$, который сходится абсолютно (см. пункт 2 задачи 2).

Полная область сходимости хорошо видна на схеме:



2)

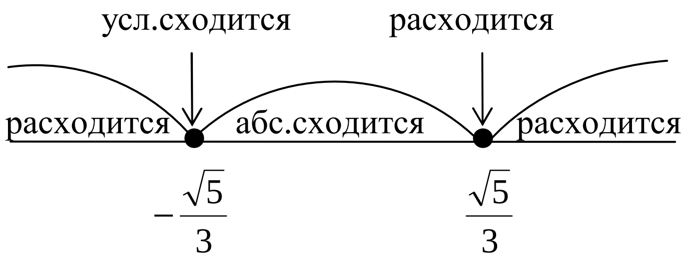
Так как $|c_n| = \dfrac{3^n}{n\cdot\sqrt{5}^n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n\cdot\sqrt{5}^n}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ и

$R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (см. теорему 10).

При $x=\frac{\sqrt{5}}{3}$ получаем 1-гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который расходится (см. примеры 5 и 7).

При $x=-\frac{\sqrt{5}}{3}$ исходный ряд принимает вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$. Этот ряд условно сходится (см. пример 20).

Мы получили полное описание области сходимости исходного ряда:



3) Для нахождения радиуса сходимости воспользуемся формулой (9). Так как $|c_n|=\frac{n!}{4^n}$, то $|c_{n+1}|=\frac{(n+1)!}{4^{n+1}}=\frac{n!(n+1)}{4^n\cdot 4}$. Вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)\cdot 4^n}{4^n\cdot 4\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{4}=\infty .$$

То есть $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}}=\frac{1}{\infty}=0$ и исходный ряд сходится в одной точке $x=0$.

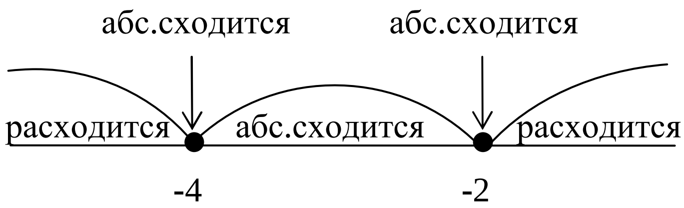
4) Сначала сделаем замену переменных $y=x+3$. Исходный ряд примет вид: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^3+2n}$. Здесь $|c_n|=\frac{1}{n^3+2n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^3+2n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}}=1$. Тогда

$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}=1$ (см. теорему 10).

При $y=1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2n}$, который сходится (т.к. $\frac{1}{n^3+2n}\sim\frac{1}{n^3}$ при $n\to\infty$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ сходится как 3-гармонический ряд (см. пример 7, пункт 1 задачи 1)).

При $y=-1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+2n}$, который сходится абсолютно (так как ряд составленный из модулей членов знакочередующегося ряда сходится (см.теорему 8)).

Область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{n^3+2n}$ определяется неравенствами $-1\le y\le 1$. Возвращаясь к переменной x получим: $-4\le x\le -2$. Исходный ряд абсолютно сходится, если $x\in[-4;-2]$, и расходится, если $x\notin[-4;-2]$.



<u>Решение задачи 4</u>

1) Подставив в формулу (21) 0,05 вместо x, получаем разложение в степенной ряд функции

$$\ln(1{,}05)=\ln(1+0{,}05)=0{,}05-\frac{0{,}05^2}{2}+\frac{0{,}05^3}{3}+...+\frac{(-1)^n}{n+1}0{,}05^{n+1}+...$$

Этот ряд является знакочередующимся. Следовательно, по теореме 9 остаток ряда мы можем отбросить, начиная с члена, модуль которого будет меньше требуемой точности вычисления ε. Имеем:

$0{,}05>0{,}0001$; $\quad \frac{0{,}05^2}{2}=0{,}00125>0{,}0001$; $\quad \frac{0{,}05^3}{3}\approx 0{,}0000417<0{,}0001$. Поэтому остаток данного ряда можно отбросить, начиная с третьего члена. Получаем приближенное значение $\ln(1{,}05)\approx 0{,}05-0{,}00125=0{,}04875\approx 0{,}0488$.

2) Напомним, что $\cos 10^0 = \cos\frac{\pi}{18}$. Воспользуемся формулой (24). Подставляя $\frac{\pi}{18}$ вместо x, получаем следующее разложение:

$$\cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Ясно, что этот ряд знакочередующийся. Так как $\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} < 0{,}001 = \varepsilon$, то по теореме 9 для достижения нужной точности можно отбросить все члены полученного ряда, начиная с третьего. То есть $\cos\frac{\pi}{18} \approx 1 - 0{,}01522 = 0{,}98478 \approx 0{,}985$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

3) Используя формулу (23), получим разложение подынтегральной функции в степенной ряд: $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$

Очевидно, что полученный ряд (так же как и ряд (23)) сходится на всей числовой прямой. Применяя теорему 13 о почленном интегрировании степенных рядов, получаем:

$$\int_0^{0,5} \sin x^2 dx = \int_0^{0,5} \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} + \ldots \right)\Bigg|_0^{0,5} =$$

$$= \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^7}{3!\cdot 7} + \frac{0{,}5^{11}}{5!\cdot 11} + \ldots$$

Полученный ряд удовлетворяет всем условиями признака Лейбница. Так как $\frac{0{,}5^{11}}{5!\cdot 11} < 0{,}0001$, то по теореме 9 для достижения нужной точности можно отбросить все члены полученного ряда, начиная с третьего. То есть $\int_0^{0,5} \sin x^2 dx \approx 0{,}0417 - 0{,}0002 = 0{,}0415$.

4) Применим формулу (26). Получим разложение функции $\sqrt[4]{1+x^3}=(1+x^3)^{0,25}$ в степенной ряд для $x\in(-1;1)$:

$$(1+x^3)^{0,25}=1+0,25x^3+\frac{0,25(0,25-1)}{2!}x^6+\ldots+\frac{0,25(0,25-1)\ldots(0,25-n+1)}{n!}x^{3n}+\ldots$$

По теореме 13 этот ряд можно почленно интегрировать по отрезку $[0;0,6]$:

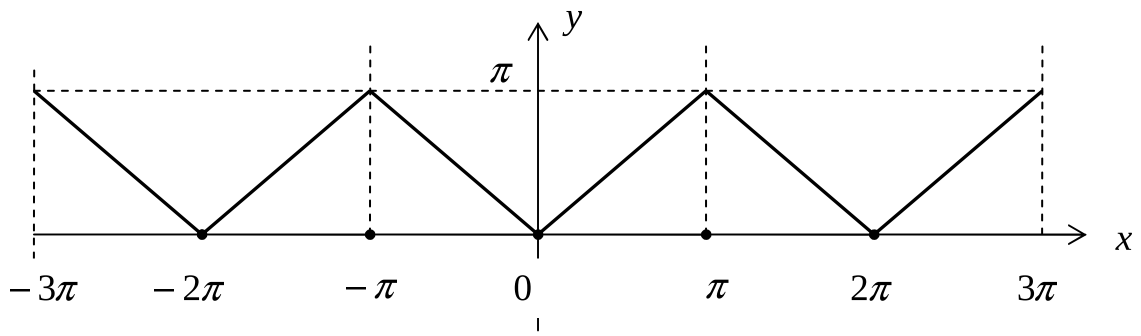
$$\int_0^{0,6}(1+x^3)^{0,25}dx=\int_0^{0,6}\left(1+0,25x^3+\frac{0,25(0,25-1)}{2!}x^6+\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+0,25\frac{x^4}{4}+\frac{0,25(0,25-1)}{2!}\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,6}=0,6+0,0081-0,00019+\ldots.$$

Так как третий член меньше 0,001, то его и все последующие члены можно отбросить. Поэтому $\int_0^{0,6}(1+x^3)^{0,25}dx\approx 0,608$.

Решение задачи 5

1) Построим график функции $f(x)$, периодически продолженной на всю числовую ось:



Поскольку функция $f(x)$ четная, то все коэффициенты $b_n=0$. По формулам (45) найдем коэффициенты:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xdx+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{x^2}{\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

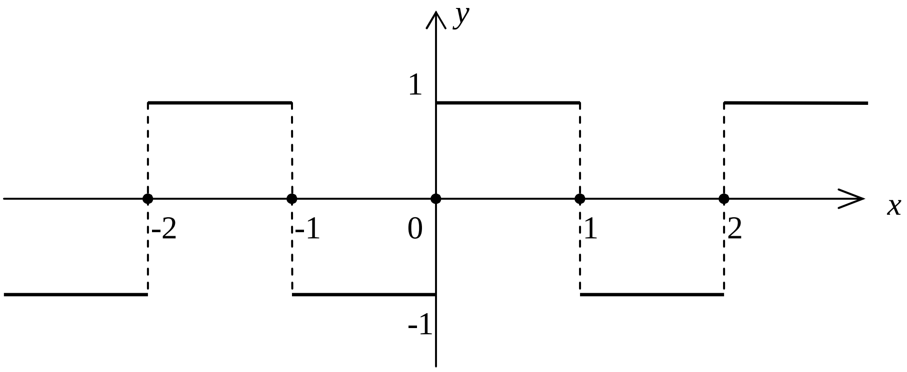
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} dv = \cos nx & u = x \\ v = \frac{1}{n}\sin nx & du = dx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx dx \right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - 1) = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1).$$

Итак, разложение функции $f(x) = |x|$ в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx.$$

2) Период функции $f(x)$, продолженной на всю числовую ось, равен 2.



По формулам (45*), учитывая нечетность функции, найдем коэффициенты Фурье функции $f(x)$:

$$a_0 = 0;\ a_n = 0;$$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{1} dx = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi x\bigg|_0^1 = \frac{2}{n\pi}(1 - \cos \pi n) = \frac{2}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right).$$

Таким образом, ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} -1 \ \textit{при} \ \ -1 < x < 0, \\ \ \ 1 \ \textit{при} \ \ \ \ 0 < x < 1; \end{cases}$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\sin n\pi x.$$